Klasse WI06a **MLAN1 - 2-te Klausur** 6. Februar 2007

Name:

Aufgabe 1

Gegeben sind drei Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Untersuchen Sie, ob diese drei Vektoren eine Basis im $\mathbb{R}^3$ bilden (*mit* Begründung).

b) Konstruieren Sie mit den gegebenen Vektoren eine o.n. Basis mit Hilfe von Gram–Schmidt, falls Sie a) mit ja beantworten können.

Aufgabe 2

a) Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

  i) Bestimmen Sie $A^2 - 3A + 2I_3$.

  ii) Bestimmen Sie mit Hilfe von i) die Matrix A^{-1}.

b) Gegeben ist $(5A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie A.

Aufgabe 3

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} ax_1 + 4x_2 + ax_3 = 1 \\ - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 2x_1 + ax_2 + 6x_3 = 4 \end{cases}$$

a) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ hat die Lösungsmenge zwei freie Parameter?

b) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ hat die Lösungsmenge einen freien Parameter?

c) Wann gibt es genau eine Lösung?

d) Wann gibt es keine Lösung?

Geben Sie im Fall b) die Lösungen an; geometrische Interpretation.

Aufgabe 4

Gegeben sind eine Gerade $g:\ \vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$, sowie ein Punkt $A(2,3,5)$.

a) Gesucht ist diejenige Gerade g' durch A, die g senkrecht schneidet.

b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt $F = g \cap g'$, sowie den an g gespiegelten Punkt A'.

Aufgabe 5

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 27 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie mit der *relativen Kolonnen–Maximum–Strategie* die $LR-$ Zerlegung von A.

b) Lösen Sie $Ax = b$ mit Hilfe der Zerlegung von a).

Aufgabe 6

a) Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Ebene E_1, welche die Punkte $A(3,2,-3)$ und $B(3,-2,5)$ enthält und parallel zur Geraden $g:\ \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist.

b) Berechnen Sie das Volumen des Tetraeders, das von den Ebenen E_1, π_2, π_3 und $E_2:\ z+3=0$ begrenzt wird.

MLAN1 Lösungen 2-te Klausur 06.02.07

Lösung 1

$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} \overset{!}{=} 0$

a) Mit dem Gauss-Algorithmus: Endschema:

x	y	z	1
2	3	1	0
.	2	4	0
.	.	3	0

d.h. der Rang $r = 3$, d.h. die drei Vektoren sind linear unabhängig.

b)

$$\vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung 2

a) i) $A^2 - 3A + 2I_3 = 0$

ii) $A^{-1} = \frac{1}{2}(3I_3 - A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

b) $(5\,A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} =: C^{-1}$ und damit $5\,A^T = C = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$,

also $A = \frac{1}{5}\,C^T = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Lösung 3

Gauss-Algorithmus

Schema nach einem Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	$4 - \frac{a^2}{2}$	$-2a$	$1 - 2a$

Schema nach zwei Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	.	$8 - 2a - a^2$	$7 - 2a - \frac{3}{4}\,a^2$

a) zwei freie Parameter sind *nicht* möglich, da zwei Pivots immer möglich sind, unabhängig von a ($r = 2$).

b) Abbruch nach zwei Schritten: $8 - 2a - a^2 = 0 \Longleftrightarrow a = -4$ oder $a = 2$.
Damit es Lösungen gibt, muss die VB erfüllt sein: $7 - 2a - \frac{3}{4}\,a^2 = 0 \Longleftrightarrow a = -\frac{14}{3}$ oder $a = 2$.

Also: ein freier Parameter genau dann, wenn $a = 2$: $x = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

geometrisch: drei Ebenen, die sich in einer Geraden schneiden.

c) genau eine Lösung: $a \neq -4$ und $a \neq 2$

d) keine Lösung: $a = -4$, VB nicht erfüllt.

Lösung 4

a) $F \in g$, d.h. $F(-3+\mu, -3+7\mu, 1+3\mu)$ und damit $\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 5-\mu \\ 6-7\mu \\ 4-3\mu \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a} \cdot \overrightarrow{FA} = 0 \Longrightarrow \mu = 1$

und damit $F(-2, 4, 4)$. Also $g' : \vec{r} = \overrightarrow{0A} + \mu \overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{0A'} = \overrightarrow{0A} + 2\overrightarrow{AF} \Longrightarrow A'(-6, 5, 3)$

Lösung 5

Gauss-Algorithmus, Endschema:

0	0	1	-1	-2	1
1	0	0	-1	-5	6
0	1	0	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{27}{5}$

a)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{27}{5} \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) erster Schritt: $Lc = Pb$, wobei $Pb = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 27 \end{pmatrix} \Longrightarrow c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 27 \end{pmatrix}$

zweiter Schritt: $Rc = x \Longrightarrow x = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$

Lösung 6

a) $g : \vec{r} = \overrightarrow{0P_0} + \mu\vec{a}$

$E_1 : \vec{r} = \overrightarrow{0A} + \alpha\vec{a} + \beta\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und damit

$E_1 : 4x + 6y + 3z = 15$

b) $V = \frac{h}{3}G$: Schnittpunkte der Ebene E_1 mit den Koordinatenachsen und $z = -3$ liefert die Punkte $(0,0,-3)$, $(0,0,5)$, $(6,0,-3)$, $(0,4,-3)$ und somit $h = 8$ und $G = 12$ woraus $V = 32$ resultiert.

alte Lösungen

Lösung 7

a)

b) Endschema:

x_1	x_2	x_3	x_4	1
1	0	1	-2	2
.	1	-2	3	-1
.	.	7	-6	5
.	.	.	.	2

Das Glgsyst hat keine Lösung, da $r = 3$ und die letzte Zeile $0 = 2$ ein Widerspruch darstellt!

Lösung 8

Endschema:

b_{11}	b_{12}	b_{21}	b_{22}	1
2	-1	1	0	-3
.	5	0	1	12
.	.	-1	-1	-5
.	.	.	2	-6

also $b_{22} = -3$, $b_{21} = 8$, $b_{12} = 3$ und $b_{11} = -4$

$B = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$, das gegebene Problem hat genau eine Lösung.

Lösung 9

Endschema:

x	y	z	1
2	3	1	1
.	1	$(2t-1)$	-1
.	.	$(1-6t)(1-2t)$	$3(1-2t)$

a) $t \neq \frac{1}{2}$ und $t \neq \frac{1}{6}$, Rang $r = 3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{1-6t} \begin{pmatrix} -4-3t \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) $t = \frac{1}{6}$, letzte Zeile: $0 = 2$ ist ein Widerspruch!

c) $t = \frac{1}{2}$, Rang $r = 2$, $z = \mu =$ freier Parameter, $y = -1$ und $x = 2 - \frac{\mu}{2}$ und somit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mu \in \mathbb{R}$$

Lösung 10

a) $s_a = \sum\limits_{k=1}^{10} \left(k \cdot \sum\limits_{n=1}^{2k} n \right) = \sum\limits_{k=1}^{10} k \cdot \frac{2k(2k+1)}{2} = 2 \cdot \sum\limits_{k=1}^{10} k^3 + \sum\limits_{k=1}^{10} k^2 = 2 \cdot \left(\frac{10 \cdot 11}{2}\right)^2 + \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 6050 + 385 = 6435$

b) $s_b = \sum\limits_{n=1}^{N} \left((a-1) \cdot \sum\limits_{k=0}^{n-1} a^k \right) = \sum\limits_{n=1}^{N} (a^n - 1) = a \cdot \sum\limits_{n=0}^{N-1} a^{n-1} - N = a \cdot \frac{a^N-1}{a-1} - N$

Lösung 11

$$\sum_{l=1}^{15} x_l = 20 \qquad \sum_{l=1}^{15} x_l^2 = 25 \quad \text{und damit} \qquad s = \sum_{k=1}^{15} (x_k - 80) = 20 - 15 \cdot 120 = -1780$$

Lösung 12

$$s_N = 2 \cdot \sum_{n=1}^{N} \left\{ \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} \right\} = 3 \cdot \sum_{n=1}^{N} n^2 + \sum_{n=1}^{N} n = N(N+1)^2$$

Lösung 13

$$\sum_{j=1}^{20} x_j = 4 \qquad \sum_{j=1}^{20} x_j^2 = \frac{3}{4} \qquad -3 \cdot \sum_{j=1}^{20} \left(x_j^2 - 2x_j + 1\right) = -3 \cdot \frac{3}{4} + 6 \cdot 4 - 3 \cdot 20 = -\frac{153}{4}$$

$$s = 2 \cdot \sum_{k=1}^{20} x_k - 20 \cdot \frac{153}{4} = 2 \cdot 4 - 5 \cdot 153 = -757$$