Klasse WI06b **MLAN1 - 1-te Klausur** 12. Dezember 2006

Name:

Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie x und z so, dass die Punkte $A(5,-6,-1)$, $B(-7,-3,2)$ und $C(x,5,z)$ auf einer Geraden liegen.

b) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie μ so, dass $3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + 2\vec{c} - 3\vec{d}$ und $\begin{pmatrix} \mu \\ 1 \end{pmatrix}$ *linear abhängig* sind.

Aufgabe 2

In einem Quadrat $ABCD$ liegt der Punkt E auf BC und der Punkt F auf CD so, dass $\overline{CE} = \frac{1}{4}\,\overline{CB}$ und $\overline{DF} = \frac{1}{3}\,\overline{DC}$.
Die Geraden $g = g(A,E)$ und $h = h(B,F)$ schneiden sich in G. Welche Bruchteile machen die Strecken $\overline{AG}$ und $\overline{GF}$ von $\overline{AE}$ bzw. $\overline{BF}$ aus?

Aufgabe 3

a) Gesucht ist eine Matrix B so, dass

$$B \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie viele Lösungen gibt es?

b) Gegeben ist ein Spaltenvektor $d = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ z \end{pmatrix}$.

Gesucht ist $z > 0$ so, dass $d^T d = 21$. Bestimmen Sie anschliessend $C = d^T(d\,d^T)d$. Was ist C für eine Matrix?

Aufgabe 4

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & ax_2 & + & bx_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2ax_2 & + & bx_3 & = & 2+a \\ -x_1 & + & ax_2 & - & x_3 & = & 2a-1-b \end{array} \right.$$

a) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ hat die Lösungsmenge zwei freie Parameter?

b) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ ist die Lösungsmenge von der Form, (*alle* Möglichkeiten)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} \qquad \mu \in \mathbb{R}$$

c) Wann gibt es genau eine Lösung?

Geben Sie in den Fällen a) und b) die Lösungen an, geometrische Interpretation.

Aufgabe 5

$$\text{Gegeben sind} \quad \sum_{j=0}^{19} (4x_{j+1} - 2) = 0 \qquad \text{und} \qquad \sum_{j=2}^{21} (2x_{j-1} - 1)^2 = 0$$

$$\text{Gesucht ist die Summe} \quad s = \sum_{k=-1}^{18} \left\{ 2x_{k+2} + (-3) \cdot \sum_{i=4}^{23} (-x_{i-3} + 1)^2 \right\}$$

Aufgabe 6

Gesucht ist eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden der Ebene $E_1 :\ x - 2y + z = 0$ mit der Ebene $E_2 = E_2(A,B,C)$, wobei $A(2,3,1)$, $B(-3,0,2)$ und $C(1,2,3)$.

MLAN1 Lösungen 1-te Klausur 12.12.06

Lösung 1

a) $\vec{a} = \mu \cdot \vec{b}$, wobei $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x-5 \\ 11 \\ z+1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mu = \frac{3}{11}$ und damit $x = -39$ und $z = 10$.

b) $3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + 2\vec{c} - 3\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -12 \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} \mu \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \nu = -12$ und somit $\mu = -\frac{1}{6}$.

Lösung 2

Mit $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ haben wir $\overrightarrow{AE} = \vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$ und $\overrightarrow{BF} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \vec{b}$ und schliesslich

$$\vec{a} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GA} = \vec{0} \qquad \vec{a} + \mu\left(-\frac{2}{3}\vec{a} + \vec{b}\right) + \nu\left(\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}\right) = \vec{0} \qquad \left(1 - \frac{2}{3}\mu + \nu\right)\vec{a} + \left(\mu + \frac{3}{4}\nu\right)\vec{b} = \vec{0}$$

Da $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig, liefert der Koeffizientenvergleich: $\mu = \frac{1}{2}$, $\nu = -\frac{2}{3}$, also $\frac{\overline{BG}}{\overline{BF}} = \frac{1}{2}$ und $\frac{\overline{AG}}{\overline{AE}} = \frac{2}{3}$.

Lösung 3

a) $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $z = 4$, $C = (d^T d) \cdot (d^T d) = 21^2 = 441$ (Assoziativgesetz der Matrizenmultiplikation),
C ist ein Skalar, d.h. eine $1 \times 1-$ Matrix.

Lösung 4

a) $a = 0$ und $b = 1$: $x_2 = \mu$, $x_3 = \nu$ und $x_1 = 2 - \nu$, also

$$(1) \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

geometrisch: drei zusammenfallende Ebenen, wobei (1) eine Parameterdarstellung der Ebene $E: \ x_1 + x_3 = 2$ ist. E ist dritt-projizierend, d.h. parallel zur x_2- Achse.

b) $a \neq 0$ und $b = 1$: $x_3 = \mu$, $x_2 = 1$ und $x_1 = 2 - a - \mu$, also

$$(2) \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mu \in \mathbb{R}$$

geometrisch: drei Ebenen, die sich in einer Geraden g schneiden, wobei (2) eine Parameterdarstellung von g ist.

oder

$a = 0$ und $b \neq 1$: $x_3 = -1$, $x_2 = \mu$ und $x_1 = 2 - b$, also

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-b \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mu \in \mathbb{R} \tag{3}$$

geometrisch: drei Ebenen, die sich in einer Geraden g schneiden, wobei (3) eine Parameterdarstellung von g ist.

c) $a \neq 0$ und $b \neq 1$:
geometrisch: drei Ebenen, die sich in einem Punkt S schneiden. $S(2 - a + b,\, 1,\, -1)$

Lösung 5

Aus den gegebenen Gleichungen erhalten wir:

$$\sum_{j=1}^{20} x_j = 10 \qquad \text{und} \qquad \sum_{j=1}^{20} x_j^2 = 5$$

einsetzen in

$$s = \sum_{k=1}^{20} \left(2x_k - 3 \cdot \sum_{i=1}^{20} (-x_i + 1)^2 \right) = \sum_{k=1}^{20} (2x_k - 3 \cdot 5) = 2 \cdot \sum_{k=1}^{20} x_k - 15 \cdot 20 = -14 \cdot 20 = -280$$

Lösung 6

Parameterdarstellung von E_2 und daraus anschliessend eine Koordinatengleichung:

$$E_2 : \quad \vec{r} = \overrightarrow{0A} + \mu \vec{a} + \nu \vec{b} \qquad \text{wobei} \quad \vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Elimination von μ und ν liefert:

$$E_2 : \quad 5x - 9y - 2z = -19$$

Schnittgerade $g = E_1 \cap E_2$ mit dem Gauss-Algorithmus:

Endschema:

x	y	z	1
1	0	-13	-38
.	1	-7	-19

also $g : \vec{r} = \begin{pmatrix} -38 \\ -19 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$

alte Lösungen

Lösung 7

a)

b) Endschema:

x_1	x_2	x_3	x_4	1
1	0	1	-2	2
.	1	-2	3	-1
.	.	7	-6	5
.	.	.	.	2

Das Glgsyst hat keine Lösung, da $r = 3$ und die letzte Zeile $0 = 2$ ein Widerspruch darstellt!

Lösung 8

Endschema:

b_{11}	b_{12}	b_{21}	b_{22}	1
2	-1	1	0	-3
.	5	0	1	12
.	.	-1	-1	-5
.	.	.	2	-6

also $b_{22} = -3$, $b_{21} = 8$, $b_{12} = 3$ und $b_{11} = -4$

$B = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$, das gegebene Problem hat genau eine Lösung.

Lösung 9

Endschema:

x	y	z	1
2	3	1	1
.	1	$(2t-1)$	-1
.	.	$(1-6t)(1-2t)$	$3(1-2t)$

a) $t \neq \frac{1}{2}$ und $t \neq \frac{1}{6}$, Rang $r = 3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{1-6t} \begin{pmatrix} -4-3t \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) $t = \frac{1}{6}$, letzte Zeile: $0 = 2$ ist ein Widerspruch!

c) $t = \frac{1}{2}$, Rang $r = 2$, $z = \mu =$ freier Parameter, $y = -1$ und $x = 2 - \frac{\mu}{2}$ und somit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R}$$

Lösung 10

a) $s_a = \sum\limits_{k=1}^{10} \left(k \cdot \sum\limits_{n=1}^{2k} n \right) = \sum\limits_{k=1}^{10} k \cdot \frac{2k(2k+1)}{2} = 2 \cdot \sum\limits_{k=1}^{10} k^3 + \sum\limits_{k=1}^{10} k^2 = 2 \cdot \left(\frac{10 \cdot 11}{2}\right)^2 + \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 6050 + 385 = 6435$

b) $s_b = \sum_{n=1}^{N} \left((a-1) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^k \right) = \sum_{n=1}^{N} (a^n - 1) = a \cdot \sum_{n=0}^{N-1} a^{n-1} - N = a \cdot \frac{a^N - 1}{a-1} - N$

Lösung 11

$$\sum_{l=1}^{15} x_l = 20 \qquad \sum_{l=1}^{15} x_l^2 = 25 \quad \text{und damit} \qquad s = \sum_{k=1}^{15} (x_k - 80) = 20 - 15 \cdot 120 = -1780$$

Lösung 12

$$s_N = 2 \cdot \sum_{n=1}^{N} \left\{ \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} \right\} = 3 \cdot \sum_{n=1}^{N} n^2 + \sum_{n=1}^{N} n = N(N+1)^2$$

Lösung 13

$$\sum_{j=1}^{20} x_j = 4 \qquad \sum_{j=1}^{20} x_j^2 = \frac{3}{4} \qquad -3 \cdot \sum_{j=1}^{20} \left(x_j^2 - 2x_j + 1 \right) = -3 \cdot \frac{3}{4} + 6 \cdot 4 - 3 \cdot 20 = -\frac{153}{4}$$

$$s = 2 \cdot \sum_{k=1}^{20} x_k - 20 \cdot \frac{153}{4} = 2 \cdot 4 - 5 \cdot 153 = -757$$