Klasse WI06b **MLAN1 - 2-te Klausur** 6. Februar 2007

Name:

Aufgabe 1

a) Gegeben ist die Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

i) Bestimmen Sie $B^2 - 3B + 2I_3$.

ii) Bestimmen Sie die Inverse von B mit Hilfe von i).

b) Gegeben ist $(5C^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. Gesucht ist die Matrix C.

Aufgabe 2

Gegeben sind drei Vektoren

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Untersuchen Sie, ob diese drei Vektoren eine Basis im $\mathbb{R}^3$ bilden (*mit* Begründung).

b) Konstruieren Sie mit den gegebenen Vektoren eine o.n. Basis mit Hilfe von Gram–Schmidt, falls Sie a) mit ja beantworten können.

Aufgabe 3

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ cx_1 & + & 4x_2 & + & cx_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & cx_2 & + & 6x_3 & = & 4 \end{array} \right.$$

a) Für welche Werte von $c \in \mathbb{R}$ hat die Lösungsmenge zwei freie Parameter?

b) Für welche Werte von $c \in \mathbb{R}$ hat die Lösungsmenge einen freien Parameter?

c) Wann gibt es genau eine Lösung?

d) Wann gibt es keine Lösung?

Geben Sie im Fall b) die Lösungen an; geometrische Interpretation.

bitte wenden

Aufgabe 4

a) Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Ebene E_1, welche die Punkte $A(3,2,-3)$ und $B(3,-2,5)$ enthält und parallel zur Geraden $g:\ \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist.

b) Berechnen Sie das Volumen des Tetraeders, das von den Ebenen E_1, π_2, π_3 und $E_2:\ z+3=0$ begrenzt wird.

Aufgabe 5

Gegeben sind eine Gerade $g:\ \vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$, sowie ein Punkt $A(2,3,5)$.

a) Gesucht ist diejenige Gerade g' durch A, die g senkrecht schneidet.

b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt $F = g \cap g'$, sowie den an g gespiegelten Punkt A'.

Aufgabe 6

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 54 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie mit der *relativen Kolonnen–Maximum–Strategie* die $LR-$ Zerlegung von A.

b) Lösen Sie $Ax = b$ mit Hilfe der Zerlegung von a).

MLAN1 Lösungen 2-te Klausur 06.02.07

Lösung 1

a) i) $B^2 - 3B + 2I_3 = 0$

ii) $B^{-1} = \frac{1}{2}\,(3I_3 - B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

b) $(5\,C^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} =: B^{-1}$ und damit $5\,C^T = B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$,

also $C = \frac{1}{5}\,B^T = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Lösung 2

$x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 + z\vec{a}_3 \overset{!}{=} 0$

a) Mit dem Gauss-Algorithmus: Endschema:

x	y	z	1
2	3	1	0
.	2	4	0
.	.	3	0

d.h. der Rang $r = 3$, d.h. die drei Vektoren sind linear unabhängig.

b)

$$\vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung 3

Gauss-Algorithmus

Schema nach einem Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	$4 - \frac{c^2}{2}$	$-2c$	$1 - 2c$

Schema nach zwei Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	.	$8 - 2c - c^2$	$7 - 2c - \frac{3}{4}\,c^2$

a) zwei freie Parameter sind *nicht* möglich, da zwei Pivots immer möglich sind, unabhängig von c ($r = 2$).

b) Abbruch nach zwei Schritten: $8 - 2c - c^2 = 0 \iff c = -4$ oder $c = 2$.
Damit es Lösungen gibt, muss die VB erfüllt sein: $7 - 2c - \frac{3}{4}\,c^2 = 0 \iff c = -\frac{14}{3}$ oder $c = 2$.

Also: ein freier Parameter genau dann, wenn $c = 2$: $x = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

geometrisch: drei Ebenen, die sich in einer Geraden schneiden.

c) genau eine Lösung: $c \neq -4$ und $c \neq 2$

d) keine Lösung: $c = -4$, VB nicht erfüllt.

Lösung 4

a) $g:\ \vec{r} = \overrightarrow{0P_0} + \mu\vec{a}$

$E_1:\ \vec{r} = \overrightarrow{0A} + \alpha\vec{a} + \beta\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und damit

$E_1:\ 4x + 6y + 3z = 15$

b) $V = \frac{h}{3}G$: Schnittpunkte der Ebene E_1 mit den Koordinatenachsen und $z = -3$ liefert die Punkte $(0,0,-3)$, $(0,0,5)$, $(6,0,-3)$, $(0,4,-3)$ und somit $h = 8$ und $G = 12$ woraus $V = 32$ resultiert.

Lösung 5

a) $F \in g$, d.h. $F(-3+\mu, -3+7\mu, 1+3\mu)$ und damit $\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 5-\mu \\ 6-7\mu \\ 4-3\mu \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a}\cdot\overrightarrow{FA} = 0 \Longrightarrow \mu = 1$

und damit $F(-2,4,4)$. Also $g':\ \vec{r} = \overrightarrow{0A} + \mu\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{0A'} = \overrightarrow{0A} + 2\overrightarrow{AF} \Longrightarrow A'(-6,5,3)$

Lösung 6

Gauss-Algorithmus, Endschema:

0	0	1	-1	-2	1
1	0	0	-1	-5	6
0	1	0	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{27}{5}$

a)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{27}{5} \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) erster Schritt: $Lc = Pb$, wobei $Pb = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 54 \end{pmatrix} \Longrightarrow c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 54 \end{pmatrix}$

zweiter Schritt: $Rc = x \Longrightarrow x = \begin{pmatrix} -14 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix}$