Klasse WI06a **MLAN2 erste-Klausur** 02. Mai 2007

Name:

Aufgabe 1

Lösen Sie folgende goniometrische Gleichungen:

a) $1 - \frac{1}{\sin(z)} = 6\sin(z)$

b) $1 - \tan(x) = \cos(2x)$

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie die Kondition des Problems

$$H(w) = \sqrt{2w^2 - 1} - \sqrt{2w^2 - 3} \qquad (1)$$

für $|w|$ gross.

b) Vermeiden Sie, falls möglich, die Auslöschung in (1).

Aufgabe 3

Bestimmen Sie den Abstand folgender windschiefer Geraden g und h

$$g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad h: \vec{r} = \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(Abstand *inklusive* der Fusspunkte).

Aufgabe 4

a) $\sin\left(\frac{3x}{2} - 2\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, *alle* Lösungen, exakt.

b) Drücken Sie $\cos(4z)$ allein mit $\cos(z)$ aus.

Aufgabe 5

Gegeben ist die Matrix

$$B(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & \beta & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

mit einem Parameter β. Die Determinante von $B(\beta)$ ist eine Funktion in β und wird mit $f(\beta)$ bezeichnet.

a) Bestimmen Sie $f(\beta)$ in Abhängigkeit von β aus den beiden bekannten Werten
$f(-2) = 65$ und $f(5) = 16$.

b) Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist $B(\beta)$ invertierbar?

c) Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit $B(\beta)$ als Koeffizientenmatrix nur bedingt lösbar? (Anzahl Lösungen?)

Aufgabe 6

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 10^{-5} & 10^{-5} \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ und der rechten Seite $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die exakte Lösung ist $x_e = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Kondition $\kappa(A)$ von A in der $\|\ldots\|_1 -$ Norm.

b) Betrachten Sie nun für kleine positive ε die folgenden rechten Seiten:

b1) $\hat{b}_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix}$ b2) $\hat{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+\varepsilon \end{pmatrix}$

und berechnen Sie die entsprechenden Lösungen $\hat{x}_1$ und $\hat{x}_2$.

c) Bestimmen Sie für die beiden Lösungen aus b) die relativen Fehler $\|\delta\hat{x}_1\|_1$ und $\|\delta\hat{x}_2\|_1$.
Vergleichen Sie diese relativen Fehler mit der theoretisch hergeleiteten Abschätzung. Interpretation?

WI06a MLAN2 Lösungen erste Klausur 02.05.07

Lösung 1

a) $6u^2 - u + 1 = 0$, mit $u := \sin(z)$ $u_{1.2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-24}}{12} \Longrightarrow$ *keine* Lösung!
(da die Diskriminante negativ ist)

b) $\tan(x) = 1 : x_k = \frac{\pi}{4} + k\,\pi$ oder $\sin(x) = 0 : x_k = k\,\pi$

Lösung 2

$H'(w) = \frac{2w\left(\sqrt{2w^2-3}-\sqrt{2w^2-1}\right)}{\sqrt{2w^2-1}\sqrt{2w^2-3}}$, wobei $' := \frac{d}{dw}$

a)

$$\left|\frac{w}{H(w)} \cdot \frac{2w\left(\sqrt{2w^2-3}-\sqrt{2w^2-1}\right)}{\sqrt{2w^2-1}\sqrt{2w^2-3}}\right| = \left|\frac{-2w^2}{\sqrt{2w^2-1}\sqrt{2w^2-3}}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2w^2}}\sqrt{1-\frac{3}{2w^2}}}\right|$$

und damit

$$\kappa_H(w) = \lim_{|w|\to\infty}\left|\frac{w \cdot H'(w)}{H(w)}\right| = 1,$$

d.h. die Auslöschung kann vermieden werden.

b) Ohne Auslöschung: $H(w) = \frac{2}{\sqrt{2w^2-1}+\sqrt{2w^2-3}}$ nach Erweiterung mit $\sqrt{2w^2-1} + \sqrt{2w^2-3}$.

Lösung 3

Transversale t von g und h, die gleichzeitig auf beiden Geraden senkrecht steht, d.h. für den Richtungsvektor $\vec{a}$ von t muss gelten: $\vec{a} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{a} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{a} = \mu \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Ebene $E_1 = E_1(h, \vec{a}) :\ 2x - 20y + z = 0$ und damit $P = g \cap E_1 = (\frac{7}{9}, \frac{1}{9}, \frac{6}{9})$ ein erster Fusspunkt von t

$\Rightarrow t :\ \vec{r} = \overrightarrow{0P} + \mu\vec{a}$ und damit $Q = t \cap h = (-\frac{1}{9}, 0, \frac{2}{9})$ der zweite Fusspunkt von t.

$d = |\overrightarrow{PQ}| = |\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}| = \frac{\sqrt{81}}{9} = 1$

Lösung 4

a) $\frac{3x}{2} - 2 = \frac{\pi}{3} + k\,2\pi \Longrightarrow x_k = \left(\frac{2\pi}{9} + \frac{4}{3}\right) + k\,\frac{4\pi}{3}$
oder
$\frac{3x}{2} - 2 = \frac{2\pi}{3} + k\,2\pi \Longrightarrow x_k = \left(\frac{4\pi}{9} + \frac{4}{3}\right) + k\,\frac{4\pi}{3}$

b) $\cos(4z) = 2 \cdot \cos^2(2z) - 1 = 2 \cdot (2\,\cos^{(z)} - 1)^2 - 1 = 8\cos^4(z) - 8\cos^2(z) + 1$

Lösung 5

a) $f(\beta) = m\beta + q$, linear in β. $\begin{cases} d(-2) = 65 = -2\,m + q \\ d(5) = 16 = 5\,m + q \end{cases} \implies \quad m = -7 \quad q = 51$

also: $f(\beta) = 51 - 7\beta$

b) $f(\beta) \neq 0 \iff \beta \neq \frac{51}{7}$

c) $f(\beta) = 0 \iff \beta = \frac{51}{7}$, d.h. vorzeitiger Abbruch.
Keine Lösung, falls *eine* VB nicht erfüllt ist und ∞ viele Lösungen, falls *alle* VB erfüllt sind.

Lösung 6

$$A^{-1} = 10^5 \begin{pmatrix} 3 & -10^{-5} \\ -2 & 10^{-5} \end{pmatrix}$$

a) Spaltenmaximum: $\|A\|_1 = 3 + 10^{-5}$ und $\|A^{-1}\|_1 = 5 \cdot 10^5$ und damit $\kappa(A) = 9 \cdot 10^5 + 3$

b) b1) $\hat{x}_1 = A^{-1}\hat{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 + 3\varepsilon 10^5 \\ 1 - 2\varepsilon 10^5 \end{pmatrix} = x_1 + \Delta x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon 10^5 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

b2) $\hat{x}_2 = A^{-1}\hat{b}_2 = (1+\varepsilon)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = x_2 + \Delta x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\|x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{2} |x_k|$, Summe der Beträge.

$\|\delta\hat{x}_1\|_1 = \frac{\|\Delta x_1\|}{\|x_1\|} = \frac{5}{2}\,\varepsilon\,10^5$, und $\|\delta\hat{b}_1\|_1 = \frac{\|\Delta b_1\|}{\|b_1\|} = \varepsilon$, da $\hat{b}_1 = b_1 + \Delta b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}$

$\|\delta\hat{x}_2\|_1 = \frac{\|\Delta x_2\|}{\|x_2\|} = \varepsilon$, und $\|\delta\hat{b}_2\|_1 = \frac{\|\Delta b_2\|}{\|b_2\|} = \varepsilon$, da $\hat{b}_2 = b_2 + \Delta b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$

theoretische Schranke: $\|\delta\hat{x}_1\|_1 \leq \kappa(A) \cdot \|\delta\hat{b}_1\|_1$ ist realistisch, sie wird angenommen, da der relative Fehler von $\hat{x}_1$ von $O(10^5)$.

$\|\delta\hat{x}_2\|_1 \leq \kappa(A) \cdot \|\delta\hat{b}_2\|_1$ hingegen ist zu pessimistisch, der relative Fehler von $\hat{x}_2$ ist gleich gross wie derjenige von $\hat{b}_2$!

Aufgabe 7

Aufgabe 8

Gegeben: Gerade $g:\ \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, sowie die Punkte $A(0,3,9)$, $B(-2,5,6)$ und $C(-4,7,3)$.

Gesucht sind:

- Schwerpunkt S des Dreiecks ABC.
- Gerade $g_1 \parallel g$ durch S.
- Länge der zwischen π_1 und π_2 liegenden Strecke auf g_1.

Mit dem Gauss-Algorithmus: Endschema:

x	y	z	1
2	3	1	0
.	2	4	0
.	.	3	0

d.h. der Rang $r = 3$, d.h. die drei Vektoren sind linear unabhängig.

$$\vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung 7

Gauss-Algorithmus

Schema nach einem Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	$4-\frac{a^2}{2}$	$-2a$	$1-2a$

Schema nach zwei Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	.	$8-2a-a^2$	$7-2a-\frac{3}{4}a^2$

a)

b)

c)

d)

Lösung 8

a) $F \in g$, d.h. $F(-3+\mu, -3+7\mu, 1+3\mu)$ und damit $\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 5-\mu \\ 6-7\mu \\ 4-3\mu \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a} \cdot \overrightarrow{FA} = 0 \Longrightarrow \mu = 1$

und damit $F(-2,4,4)$. Also $g':\ \vec{r} = \overrightarrow{0A} + \mu\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{0A'} = \overrightarrow{0A} + 2\overrightarrow{AF} \Longrightarrow A'(-6, 5, 3)$

Lösung 9

Gauss-Algorithmus, Endschema:

0	0	1	-1	-2	1
1	0	0	-1	-5	6
0	1	0	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{27}{5}$

a)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{27}{5} \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) erster Schritt: $Lc = Pb$, wobei $Pb = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 27 \end{pmatrix} \Longrightarrow c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 27 \end{pmatrix}$

zweiter Schritt: $Rc = x \Longrightarrow x = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$

Lösung 10

a) $g: \ \vec{r} = \overrightarrow{0P_0} + \mu\vec{a}$

$E_1: \ \vec{r} = \overrightarrow{0A} + \alpha\vec{a} + \beta\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und damit

$E_1: \ 4x + 6y + 3z = 15$

b) $V = \frac{h}{3}G$: Schnittpunkte der Ebene E_1 mit den Koordinatenachsen und $z = -3$ liefert die Punkte $(0, 0, -3)$, $(0, 0, 5)$, $(6, 0, -3)$, $(0, 4, -3)$ und somit $h = 8$ und $G = 12$ woraus $V = 32$ resultiert.

alte Lösungen

Lösung 11

a)

b) Endschema:

x_1	x_2	x_3	x_4	1
1	0	1	-2	2
.	1	-2	3	-1
.	.	7	-6	5
.	.	.	.	2

Das Glgsyst hat keine Lösung, da $r = 3$ und die letzte Zeile $0 = 2$ ein Widerspruch darstellt!

Lösung 12

Endschema:

b_{11}	b_{12}	b_{21}	b_{22}	1
2	-1	1	0	-3
.	5	0	1	12
.	.	-1	-1	-5
.	.	.	2	-6

also $b_{22} = -3$, $b_{21} = 8$, $b_{12} = 3$ und $b_{11} = -4$

$B = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$, das gegebene Problem hat genau eine Lösung.