Klasse WI06a **MLAN2 erste-Klausur** 02. Mai 2007

Name:

Aufgabe 1

Lösen Sie foldende goniometrische Gleichungen:

a) $1 - \frac{1}{\sin(z)} = 6\sin(z)$

b) $1 - \tan(x) = \cos(2x)$

Aufgabe 2

a) Schreiben Sie die Summe als Produkt und vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{3} + \varphi\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{3} - \varphi\right)$$

b) Welche der folgenden Abbildungen $n_* \,:\, \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine Norm?

i) $n_1(x) = |x_1| + 2|x_2| + x_3^2$, wobei $x \in \mathbb{R}^3$

ii) $n_2(x) = \sum_{j=1}^{4} \gamma_j \cdot |x_j|$, wobei $\gamma_j = \frac{1}{j^2},\ j = 1, 2, 3, 4$ und $x \in \mathbb{R}^4$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie den Abstand folgender windschiefer Geraden g und h

$$g:\ \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad h:\ \vec{r} = \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(Abstand *inklusive* der Fusspunkte).

bitte wenden

Aufgabe 4

a) $\cos\left(\frac{2x}{3}+1\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, *alle* Lösungen, exakt.

b) Drücken Sie $\sin(4x)$ allein mit $\sin(x)$ aus.

Aufgabe 5

a) Bestimmen Sie die Kondition des Problems

$$H(x) = 1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tag{1}$$

für $x > 0$ klein.

b) Vermeiden Sie, falls möglich, die Auslöschung in (1).

Aufgabe 6

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 10^{-5} & 10^{-5} \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ und der rechten Seite $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die exakte Lösung ist $x_e = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Kondition $\kappa(A)$ von A in der $\|\ldots\|_1 -$ Norm.

b) Betrachten Sie nun für kleine positive ε die folgenden rechten Seiten:

b1) $\hat{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+\varepsilon \end{pmatrix}$ b2) $\hat{b}_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix}$

und berechnen Sie die entsprechenden Lösungen $\hat{x}_1$ und $\hat{x}_2$.

c) Bestimmen Sie für die beiden Lösungen aus b) die relativen Fehler $\|\delta\hat{x}_1\|_1$ und $\|\delta\hat{x}_2\|_1$.
Vergleichen Sie diese relativen Fehler mit der theoretisch hergeleiteten Abschätzung. Interpretation?

WI06a MLAN2 Lösungen erste Klausur 02.05.07

Lösung 1

a) $6u^2 + u - 1 = 0,\ u := \sin(z),\ u_{1.2} = \begin{cases} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$

$\sin(z) = \frac{1}{3} : \begin{cases} z_k = \varphi + k\,2\pi \\ z_k = (\pi - \varphi) + k\,2\pi \end{cases} \qquad \varphi = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$

$\sin(z) = -\frac{1}{2} : \begin{cases} z_k = \frac{7\pi}{6} + k\,2\pi \\ z_k = \frac{11\pi}{6} + k\,2\pi \end{cases}$

b) $\tan(x) = 1 : x_k = \frac{\pi}{4} + k\,\pi$ oder $\sin(x) = 0 : x_k = k\,\pi$

Lösung 2

a) $\sqrt{3}\sin(\varphi)$, die $\sin -$ Funktion ist *ungerade*!

b) i) $n_1(x)$ ist keine Norm, da N2) $\|\alpha x\| \neq |\alpha| \cdot \|x\|$ (Homogenität) verletzt, wegen dem Term x_3^2.

ii) alle Eigenschaften N1) - N3) sind erfüllt, d.h. $n_2(x)$ ist eine Norm.

Lösung 3

Transversale t von g und h, die gleichzeitig auf beiden Geraden senkrecht steht, d.h. für den Richtungsvektor $\vec{a}$ von t muss gelten: $\vec{a} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{a} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{a} = \mu \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Ebene $E_1 = E_1(h, \vec{a}) :\ 2x - 20y + z = 0$ und damit $P = g \cap E_1 = (\frac{7}{9}, \frac{1}{9}, \frac{6}{9})$ ein erster Fusspunkt von t

$\Rightarrow t :\ \vec{r} = \overrightarrow{0P} + \mu\vec{a}$ und damit $Q = t \cap h = (-\frac{1}{9}, 0, -\frac{2}{9})$ der zweite Fusspunkt von t.

$d = |\overrightarrow{PQ}| = |\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix}| = \frac{\sqrt{129}}{9}$

Lösung 4

a) $\frac{2x}{3} + 1 = \frac{\pi}{4} + k\,2\pi \Longrightarrow x_k = \left(\frac{3\pi}{8} - \frac{3}{2}\right) + k\,3\pi$

oder

$\frac{2x}{3} + 1 = \frac{7\pi}{4} + k\,2\pi \Longrightarrow x_k = \left(\frac{21\pi}{8} - \frac{3}{2}\right) + k\,3\pi$

b) $\sin(4x) = -8\sin^3(x) + 4\sin(x)\sqrt{1 - \sin^2(x)}$

Lösung 5

a) da $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$, folgt: $H(x) = 1 - \cos(x)$, cf. entsprechende Übungsaufgabe!

$\kappa_H(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left| \frac{x \cdot H'(x)}{H(x)} \right| = 2$, mit Bernoulli z.B.

D.h. die Auslöschung kann vermieden werden.

b) Ohne Auslöschung: $H(x) = \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}$ nach Erweiterung mit $1 + \cos(x)$

Lösung 6

$$A^{-1} = 10^5 \begin{pmatrix} 3 & -10^{-5} \\ -2 & 10^{-5} \end{pmatrix}$$

a) Spaltenmaximum: $\|A\|_1 = 3 + 10^{-5}$ und $\|A^{-1}\|_1 = 5 \cdot 10^5$ und damit $\kappa(A) = 9 \cdot 10^5 + 3$

b) b1) $\hat{x}_1 = A^{-1}\hat{b}_1 = (1+\varepsilon)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 + \Delta x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b2) $\hat{x}_2 = A^{-1}\hat{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 + 3\varepsilon 10^5 \\ 1 - 2\varepsilon 10^5 \end{pmatrix} = x_2 + \Delta x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon 10^5 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $\|x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{2} |x_k|$, Summe der Beträge.

$\|\delta\hat{x}_1\|_1 = \frac{\|\Delta x_1\|}{\|x_1\|} = \varepsilon$, und $\|\delta\hat{b}_1\|_1 = \frac{\|\Delta b_1\|}{\|b_1\|} = \varepsilon$, da $\hat{b}_1 = b_1 + \Delta b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$

$\|\delta\hat{x}_2\|_1 = \frac{\|\Delta x_2\|}{\|x_2\|} = \frac{5}{2}\,\varepsilon\, 10^5$, und $\|\delta\hat{b}_2\|_1 = \frac{\|\Delta b_2\|}{\|b_2\|} = \varepsilon$, da $\hat{b}_2 = b_2 + \Delta b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}$

theoretische Schranke: $\|\delta\hat{x}_1\|_1 \leq \kappa(A) \cdot \|\delta\hat{b}_1\|_1$ ist zu pessimistisch, sie wird nicht angenommen.

$\|\delta\hat{x}_2\|_1 \leq \kappa(A) \cdot \|\delta\hat{b}_2\|_1$ hingegen ist realistisch, da der relative Fehler von $\hat{x}_2$ von $O(10^5)$

Aufgabe 7

Aufgabe 8

Gegeben: Gerade $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, sowie die Punkte $A(0,3,9)$, $B(-2,5,6)$ und $C(-4,7,3)$.

Gesucht sind:

- Schwerpunkt S des Dreiecks ABC.
- Gerade $g_1 \parallel g$ durch S.
- Länge der zwischen π_1 und π_2 liegenden Strecke auf g_1.

Mit dem Gauss-Algorithmus: Endschema:

x	y	z	1
2	3	1	0
.	2	4	0
.	.	3	0

d.h. der Rang $r = 3$, d.h. die drei Vektoren sind linear unabhängig.

$$\vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung 7

Gauss-Algorithmus

Schema nach einem Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	$4 - \frac{a^2}{2}$	$-2a$	$1 - 2a$

Schema nach zwei Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	.	$8 - 2a - a^2$	$7 - 2a - \frac{3}{4}\,a^2$

a)

b)

c)

d)

Lösung 8

a) $F \in g$, d.h. $F(-3+\mu, -3+7\mu, 1+3\mu)$ und damit $\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 5-\mu \\ 6-7\mu \\ 4-3\mu \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a} \cdot \overrightarrow{FA} = 0 \Longrightarrow \mu = 1$

und damit $F(-2,4,4)$. Also $g': \vec{r} = \overrightarrow{0A} + \mu\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{0A'} = \overrightarrow{0A} + 2\overrightarrow{AF} \Longrightarrow A'(-6,5,3)$

Lösung 9

Gauss-Algorithmus, Endschema:

0	0	1	-1	-2	1
1	0	0	-1	-5	6
0	1	0	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{27}{5}$

a)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{27}{5} \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) erster Schritt: $Lc = Pb$, wobei $Pb = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 27 \end{pmatrix} \Longrightarrow c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 27 \end{pmatrix}$

zweiter Schritt: $Rc = x \Longrightarrow x = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$

Lösung 10

a) $g:\ \vec{r} = \overrightarrow{0P_0} + \mu\vec{a}$

$E_1:\ \vec{r} = \overrightarrow{0A} + \alpha\vec{a} + \beta\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und damit

$E_1:\ 4x + 6y + 3z = 15$

b) $V = \frac{h}{3}G$: Schnittpunkte der Ebene E_1 mit den Koordinatenachsen und $z = -3$ liefert die Punkte $(0,0,-3)$, $(0,0,5)$, $(6,0,-3)$, $(0,4,-3)$ und somit $h = 8$ und $G = 12$ woraus $V = 32$ resultiert.

alte Lösungen

Lösung 11

a)

b) Endschema:

x_1	x_2	x_3	x_4	1
1	0	1	-2	2
.	1	-2	3	-1
.	.	7	-6	5
.	.	.	.	2

Das Glgsyst hat keine Lösung, da $r = 3$ und die letzte Zeile $0 = 2$ ein Widerspruch darstellt!

Lösung 12

Endschema:

b_{11}	b_{12}	b_{21}	b_{22}	1
2	-1	1	0	-3
.	5	0	1	12
.	.	-1	-1	-5
.	.	.	2	-6

also $b_{22} = -3$, $b_{21} = 8$, $b_{12} = 3$ und $b_{11} = -4$

$B = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$, das gegebene Problem hat genau eine Lösung.

Lösung 13

Endschema:

x	y	z	1
2	3	1	1
.	1	$(2t-1)$	-1
.	.	$(1-6t)(1-2t)$	$3(1-2t)$

a) $t \neq \frac{1}{2}$ und $t \neq \frac{1}{6}$, Rang $r = 3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{1-6t} \begin{pmatrix} -4-3t \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) $t = \frac{1}{6}$, letzte Zeile: $0 = 2$ ist ein Widerspruch!

c) $t = \frac{1}{2}$, Rang $r = 2$, $z = \mu =$ freier Parameter, $y = -1$ und $x = 2 - \frac{\mu}{2}$ und somit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R}$$

Lösung 14

a) $s_a = \sum_{k=1}^{10}\left(k \cdot \sum_{n=1}^{2k} n\right) = \sum_{k=1}^{10} k \cdot \frac{2k(2k+1)}{2} = 2 \cdot \sum_{k=1}^{10} k^3 + \sum_{k=1}^{10} k^2 = 2 \cdot \left(\frac{10 \cdot 11}{2}\right)^2 + \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 6050 + 385 = 6435$

b) $s_b = \sum_{n=1}^{N}\left((a-1) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^k\right) = \sum_{n=1}^{N}(a^n - 1) = a \cdot \sum_{n=0}^{N-1} a^{n-1} - N = a \cdot \frac{a^N - 1}{a-1} - N$

Lösung 15

$$\sum_{l=1}^{15} x_l = 20 \qquad \sum_{l=1}^{15} x_l^2 = 25 \quad \text{und damit} \qquad s = \sum_{k=1}^{15}(x_k - 80) = 20 - 15 \cdot 120 = -1780$$

Lösung 16

$$s_N = 2 \cdot \sum_{n=1}^{N} \left\{ \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} \right\} = 3 \cdot \sum_{n=1}^{N} n^2 + \sum_{n=1}^{N} n = N(N+1)^2$$

Lösung 17

$$\sum_{j=1}^{20} x_j = 4 \qquad \sum_{j=1}^{20} x_j^2 = \frac{3}{4} \qquad -3 \cdot \sum_{j=1}^{20} \left(x_j^2 - 2x_j + 1 \right) = -3 \cdot \frac{3}{4} + 6 \cdot 4 - 3 \cdot 20 = -\frac{153}{4}$$

$$s = 2 \cdot \sum_{k=1}^{20} x_k - 20 \cdot \frac{153}{4} = 2 \cdot 4 - 5 \cdot 153 = -757$$