Aufgabe 1

Von einem Quader ist die Kante AB gegeben, während man von den anderen von A ausgehenden Kanten AD bzw. AE weiss, dass D auf der Geraden $g = g(P,Q)$ und E in der Ebene $\varepsilon\colon x + y - z + 5 = 0$ liegt.

Dabei sind $A(-2,-4,-4)$, $B(2,4,4)$, $P(4,2,-2)$ und $Q(5,4,1)$.

Berechnen Sie das Volumen V dieses Quaders.

Aufgabe 2

a) Gegeben ist die trigonometrische Gleichung

$$\sin(2x) \cdot \bigl(2\sin^2(x) - \cos(2x)\bigr) = 0. \tag{1}$$

Bestimmen Sie alle Lösungen von (1).

b) Kondition – Auslöschung:

$$H(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tag{2}$$

Für $x > 0$ und klein haben Sie in $H(x)$ Auslöschung. Wie können Sie die Auslöschung vermeiden?

Was kann über die Kondition von (2) ausgesagt werden?

Wohin strebt der Wert von $H(x)$ für $x > 0$ und $x \longrightarrow 0$?

Aufgabe 3

a) Betrachten Sie die Quadraturformel

$$Q = \sum_{k=0}^{2} w_k\, f(\xi_k) \tag{3}$$

für das Standard-Intervall $[-h, h]$ mit den Stützstellen $\xi_0 = -h$, $\xi_1 = 0$ und $\xi_2 = h$.

Bestimmen Sie die Gewichte w_k in (3) so, dass alle Polynome bis und mit Grad 2 exakt integriert werden.

b) Benützen Sie Q aus a) mit $h = 1$, um für das Intergal

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, dx \tag{4}$$

eine Approximation zu bestimmen.

c) Trapezmethode für (4) mit fortgesetzter Halbierung: betrachten Sie die $0-$ te und $1-$ te Halbierung. Bestimmen Sie T_0, T_1, sowie den beschleunigten Wert S_1. Vergleich mit dem Resultat aus b).

Feststellung?

bitte wenden

Aufgabe 4

a) Bestimmen Sie X aus folgender Gleichung:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Resultat so einfach wie möglich.

b) Für welche Werte von $a, b \in \mathbb{R}$ hat $Ax = c$ maximalen Rang, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und } c \in \mathbb{R}^3.$$

Wie gross ist dieser maximale Rang?

Aufgabe 5

Gegeben sind die beiden harmonischen Schwingungen

$$y = f_1(t) = +4 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right), \tag{5}$$

$$y = f_2(t) = -3 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right). \tag{6}$$

a) Bestimmen Sie mit Hilfe von Zeigern die Überlagerung $y = f_1(t) + f_2(t) = f(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$, (graphische Darstellung: Einheiten für beide Achsen 2 Häuschen).

b) Für welches $t > 0$ zeigt der Zeiger der Überlagerung zum ersten Mal in Richtung der Geraden $y = -x$.

c) Lösen Sie mit Hilfe von a) die Ungleichung $y(t) \leq -2$.

Aufgabe 6

Bestimmen Sie in Abhängigkeit des Parameters $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -ax_1 & - & x_2 & + & (a-1)x_3 & = & 0 \\ 2ax_1 & + & (a+3)x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ ax_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array} \right. \tag{7}$$

a) Wann hat (7) genau eine Lösung?

b) Wann hat (7) $\infty-$ viele Lösungen, mit wievielen freien Parametern?

c) Wann hat (7) keine Lösung?

Geben Sie in den Fällen a) und b) die Lösungen an. Geometrische Interpretation.

weitere Aufgaben

Aufgabe 7

-
-
-

Aufgabe 8

a) Gegeben ist die Matrix

$$W = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Fassen Sie die obige Matrix als Tableau eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ auf, das für die eine rechte Seite b gelöst wurde, und beantworten Sie die folgenden Fragen:

- Ist das gegebene Tableaux in Zeilenstufenform `ref` oder gar in reduzierter Zeilenstufenform `rref`? Geben Sie die jeweilige Form an.
- Wie gross ist der Rang der entsprechenden System-Matrix?
- Geben Sie die Lösungsmenge an.

b) Gegeben seien die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad d = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ d_3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie d_3 so, dass diese Vektoren linear abhängig werden.

Aufgabe 9

Im Würfel $ABCDEFGH$ ist J der Mittelpunkt von HE. J wird mit einem Punkt K der Körperdiagonalen AG verbunden, wobei $\overline{AK} = \frac{1}{6}\,\overline{AG}$. Die Gerade $g = g(J, K)$ schneidet die Ebene $ABCD$ in L.
Schreiben Sie $\overrightarrow{AL}$ als Linearkombination von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$
Lös: $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{5}\,\overrightarrow{AB} + \frac{1}{10}\,\overrightarrow{AD}$

Aufgabe 10

Gegeben sind die Matrizen

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ein weiteres Beispiel

$$W = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Fassen Sie jede der obigen Matrizen als Tableau eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ auf, das für die eine rechte Seite b gelöst wurde, und beantworten Sie die folgenden Fragen:

- Welches der Tableaus weist Zeilenstufenform `ref` oder gar reduzierte Zeilenstufenform `rref` auf? Geben Sie die jeweiligen Formen an.
- Wie gross ist der Rang der entsprechenden System-Matrix?
- Welche der Lösungsmengen sind leer?

b) Fassen Sie nun jede der obigen Matrizen als Tableau zweier linearer Gleichungssysteme $Ax = b_k$ mit zwei rechten Seiten b_1 und b_2 auf. Diese beiden Gleichungssysteme wurden simultan gelöst. Beantworten Sie die gleichen Fragen wie unter a).

Aufgabe 11

Gegeben seien die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad d = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ d_3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie d_3 so, dass diese Vektoren linear abhängig werden.

Aufgabe 12 *LR - Zerlegung, Diagonal-Strategie*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die $LR-$Zerlegung von A mit dem Gauss-Algorithmus, **ohne** Permutationen. (entstehende Brüche vollständig gekürzt)

b) Lösen Sie mit Hilfe dieser Zerlegung das lineare Gleichungssystem $Ax = b$.

Aufgabe 13

Seien $L =$ eine untere $n \times n-$ Dreiecksmatrix, d.h. $l_{ij} = 0$, falls $i < j$ und
$R =$ eine obere $n \times n-$ Dreiecksmatrix, d.h. $r_{ij} = 0$, falls $i > j$.

a) Was ensteht bei der Multiplikation $L \cdot R$, wieviele Elemente sind von Null verschieden?

b) Bestimmen Sie den Rechenaufwand ($=$ Anzahl Multiplikationen) bei der Multiplikation in a)

MLAN1/2 Lösungen Assessment 21.08.07

Lösung 1

$g\colon \vec{r} = \overrightarrow{0P} + \mu\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, also $D \in g$, d.h. $D\,(4+\mu, 2+2\mu, -2+3\mu)$

Quader: setze $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$

$\vec{b} \perp \vec{a}$; mit $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6+\mu \\ 6+2\mu \\ 2+3\mu \end{pmatrix}$ und $\vec{a} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ folgt: $\mu = -2$

und schliesslich $D(2,-2,-8)$ und $\vec{b} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$\vec{c} = \nu(\vec{a} \times \vec{b}) = \nu \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. $E = l \cap \varepsilon$, wobei $l\colon \vec{r} = \overrightarrow{0A} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$: $\lambda = -3$

und daraus folgt $E(4,-10,-1)$ und $\vec{c} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Volumen $V = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| = (4\cdot 3)\cdot(2\cdot 3)\cdot(3\cdot 3) = 2^3 \cdot 3^4 = 8 \cdot 81 = 648.$

Lösung 2

a) erste Lösung: $\sin(2x) = 0\colon \implies x_k = k \cdot \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$
mit $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$ wird die Klammer: $4\sin^2(x) - 1$, also
zweite Lösung: $4\sin^2(x) - 1 = 0\colon \implies \sin(x) = \pm\frac{1}{2}$

   i) $\sin(x) = \frac{1}{2}\colon\ x_k = \frac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi$ und $x_k = \frac{5\pi}{6} + k\cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
   ii) $\sin(x) = -\frac{1}{2}\colon\ x_k = \frac{7\pi}{6} + k\cdot 2\pi$ und $x_k = \frac{11\pi}{6} + k\cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

b) Die Differenz sollte vermieden werden, z.B. mit
$H(x) = 2\cdot\cos\left(\frac{\pi - x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)$.
D.h. die Auslöschung *kann* vermieden werden!
$\implies$ die Kondition von $H(x)$ *muss* gut sein. $\lim\limits_{x\to 0^+} H(x) = 0$, da $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin(0) = 0$.

Lösung 3

a) Newton-Cotes'sche Quadratur:
zu lösendes Gleichungssystem:

$$(8) \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} w_0 & + & w_1 & + & w_2 & = & 2h \\ -w_0 & & & + & w_2 & = & 0 \\ w_0 & & & + & w_2 & = & \frac{2h}{3} \end{array} \right.$$

Die Lösung von(8) ist $w_0 = w_2 = \frac{h}{3}$ und $w_1 = \frac{4h}{3}$, (mit Gauss-Algorithmus).

b) $[-1,1] \longrightarrow [0,\frac{\pi}{2}]$ mit $x = x(\xi) = m \cdot \xi + q$, wobei $m = \frac{\pi}{4}$ und $q = \frac{\pi}{4}$, also $x(\xi) = \frac{\pi}{4}\,(\xi+1)$.

Damit $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx = \frac{\pi}{4} \int\limits_{-1}^{1} \cos(\xi+1)\,d\xi \approx \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\cos(0) + 4\,\cos(\frac{\pi}{4}) + \cos(\frac{\pi}{2})\right) = \frac{\pi}{12} \cdot (1+2\sqrt{2})$.

c) $T_0 = \frac{\pi}{4}$, $M_0 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow T_1 = \frac{1}{2}(T_0 + M_0) = \frac{\pi}{8}\,(1+\sqrt{2})$.
Daraus erhalten wir $S_1 = \frac{1}{3}\,(4 \cdot T_1 - T_0) = \frac{1}{3}\,\left(\frac{\pi}{2}\,(1+\sqrt{2}) - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{12}\,(1+2\sqrt{2})$.
S_1 ist identisch mit dem Resultat aus b), d.h. die Newton–Cotes Quadratur in a) ist nichts anderes als die Methode von Simpson!

Lösung 4

a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Determinante von $A \neq 0$:
$det(A) = -(b-1)\,(b-a) \neq 0$, d.h. $b \neq 1 \wedge a \neq b$, max. Rang $r_{max} = 3$

Lösung 5

a) $-3\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) = -3\sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$.
aus der Graphik: $x_1 = 4\,\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y_1 = 4\,\frac{1}{2}$ und $x_2 = 3\,\frac{1}{2}$, $y_2 = -3\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ und damit:
$A^2 = (x_1+x_2)^2 + (y_1+y_2)^2 = 5$
$\tan(\varphi) = \frac{y_1+y_2}{x_1+x_2} = \frac{4-3\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+3} < 0$, also $\varphi = -\arctan\left(\frac{4-3\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+3}\right)$

b) $\omega t + \varphi = \frac{3\pi}{4}$ und somit $t = \frac{1}{\omega}\,\left(\frac{3\pi}{4} - \varphi\right) = \frac{1}{\omega}\,\left(\frac{3\pi}{4} + \arctan\left(\frac{4-3\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+3}\right)\right)$.

c) $\sin(\omega t + \varphi) \leq -\frac{2}{5} \Longrightarrow \pi + \psi + k2\pi \leq (\omega t + \varphi) \leq 2\pi - \psi + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, wobei $\psi = \arcsin\left(\frac{2}{5}\right)$ mit Hilfe des Einheitskreises.
Also $\frac{1}{\omega}\,(\pi + \psi - \varphi + k2\pi) \leq t \leq \frac{1}{\omega}\,(2\pi - \psi - \varphi + k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Lösung 6

Gauss-Algorithmus
Schema nach einem Schritt (Spalten vertauschen!):

x_2	x_1	x_3	1
-1	$-a$	$a-1$	0
.	$-a(a+1)$	$a(a+2)$	0
.	.	a	0

a) Drei Pivots verschieden Null, d.h. für $a \neq 0$ und $a \neq -1$. Lösung $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, (7) hat nur die triviale Lösung (drei Ebenen, die sich im Ursprung schneiden).

b)
- $a = 0$: , $r = 1$ zwei freie Parameter:

x_2	x_1	x_3	1
-1	0	-1	0
.	0	0	0
.	.	0	0

$x_1 = \mu$ und $x_3 = \nu$, Lösung $x = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\mu, \nu \in \mathbb{R}$

(drei zusammenfallende Ebenen, die durch den Ursprung gehen).

- $a \neq 0$ und $a \; = -1$: $r = 2$, ein freier Parameter:

x_2	x_1	x_3	1
-1	1	-2	0
.	0	-1	0
.	.	0	0

$x_1 = \mu$, Lösung $x = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$

(drei Ebenen, die sich in einer Ursprungsgeraden schneiden).

c) Nicht möglich, (7) hat mindestens *eine* Lösung, cf. a) und b).

alte Lösungen

Lösung 7

a) Mit dem Gauss-Algorithmus: Endschema:

x	y	z	1
2	3	1	0
.	2	4	0
.	.	3	0

d.h. der Rang $r = 3$, d.h. die drei Vektoren sind linear unabhängig.

b)

$$\vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung 8

a) i)

ii)

b)

Lösung 9

Gauss-Algorithmus

Schema nach einem Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	$4 - \frac{a^2}{2}$	$-2a$	$1 - 2a$

Schema nach zwei Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	.	$8 - 2a - a^2$	$7 - 2a - \frac{3}{4}\,a^2$

a)

b)

c)

d)

Lösung 10

a) $F \in g$, d.h. $F(-3+\mu, -3+7\mu, 1+3\mu)$ und damit $\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 5-\mu \\ 6-7\mu \\ 4-3\mu \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a} \cdot \overrightarrow{FA} = 0 \Longrightarrow \mu = 1$

und damit $F(-2,4,4)$. Also $g' :\ \vec{r} = \overrightarrow{0A} + \mu\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{0A'} = \overrightarrow{0A} + 2\overrightarrow{AF} \Longrightarrow A'(-6,5,3)$

Lösung 11

Gauss-Algorithmus, Endschema:

0	0	1	-1	-2	1
1	0	0	-1	-5	6
0	1	0	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{27}{5}$

a)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{27}{5} \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) erster Schritt: $Lc = Pb$, wobei $Pb = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 27 \end{pmatrix} \Longrightarrow c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 27 \end{pmatrix}$

zweiter Schritt: $Rc = x \Longrightarrow x = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$

Lösung 12

a) $g: \ \vec{r} = \overrightarrow{0P_0} + \mu\vec{a}$

$E_1: \ \vec{r} = \overrightarrow{0A} + \alpha\vec{a} + \beta\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und damit

$E_1: \ 4x + 6y + 3z = 15$

b) $V = \frac{h}{3} G$: Schnittpunkte der Ebene E_1 mit den Koordinatenachsen und $z = -3$ liefert die Punkte $(0,0,-3)$, $(0,0,5)$, $(6,0,-3)$, $(0,4,-3)$ und somit $h = 8$ und $G = 12$ woraus $V = 32$ resultiert.

Lösung 13

Endschema:

x	y	z	1
1	0	-13	-38
.	1	-7	-19

also $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} -38 \\ -19 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$

alte Lösungen

Lösung 14

a)

b) Endschema:

x_1	x_2	x_3	x_4	1
1	0	1	-2	2
.	1	-2	3	-1
.	.	7	-6	5
.	.	.	.	2

Das Glgsyst hat keine Lösung, da $r = 3$ und die letzte Zeile $0 = 2$ ein Widerspruch darstellt!

Lösung 15

Endschema:

b_{11}	b_{12}	b_{21}	b_{22}	1
2	-1	1	0	-3
.	5	0	1	12
.	.	-1	-1	-5
.	.	.	2	-6

also $b_{22} = -3$, $b_{21} = 8$, $b_{12} = 3$ und $b_{11} = -4$

$B = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$, das gegebene Problem hat genau eine Lösung.

Lösung 16

Endschema:

x	y	z	1
2	3	1	1
.	1	$(2t-1)$	-1
.	.	$(1-6t)(1-2t)$	$3(1-2t)$

a) $t \neq \frac{1}{2}$ und $t \neq \frac{1}{6}$, Rang $r = 3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{1-6t} \begin{pmatrix} -4-3t \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) $t = \frac{1}{6}$, letzte Zeile: $0 = 2$ ist ein Widerspruch!

c) $t = \frac{1}{2}$, Rang $r = 2$, $z = \mu =$ freier Parameter, $y = -1$ und $x = 2 - \frac{\mu}{2}$ und somit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mu \in \mathbb{R}$$

Lösung 17

a) $s_a = \sum\limits_{k=1}^{10} \left(k \cdot \sum\limits_{n=1}^{2k} n \right) = \sum\limits_{k=1}^{10} k \cdot \frac{2k(2k+1)}{2} = 2 \cdot \sum\limits_{k=1}^{10} k^3 + \sum\limits_{k=1}^{10} k^2 = 2 \cdot \left(\frac{10 \cdot 11}{2}\right)^2 + \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 6050 + 385 =$ 6435

b) $s_b = \sum\limits_{n=1}^{N} \left((a-1) \cdot \sum\limits_{k=0}^{n-1} a^k \right) = \sum\limits_{n=1}^{N} (a^n - 1) = a \cdot \sum\limits_{n=0}^{N-1} a^{n-1} - N = a \cdot \frac{a^N - 1}{a-1} - N$

Lösung 18

$$\sum_{l=1}^{15} x_l = 20 \qquad \sum_{l=1}^{15} x_l^2 = 25 \quad \text{und damit} \qquad s = \sum_{k=1}^{15} (x_k - 80) = 20 - 15 \cdot 120 = -1780$$

Lösung 19

$$s_N = 2 \cdot \sum_{n=1}^{N} \left\{ \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} \right\} = 3 \cdot \sum_{n=1}^{N} n^2 + \sum_{n=1}^{N} n = N(N+1)^2$$

Lösung 20

$$\sum_{j=1}^{20} x_j = 4 \qquad \sum_{j=1}^{20} x_j^2 = \frac{3}{4} \qquad -3 \cdot \sum_{j=1}^{20} \left(x_j^2 - 2x_j + 1 \right) = -3 \cdot \frac{3}{4} + 6 \cdot 4 - 3 \cdot 20 = -\frac{153}{4}$$

$$s = 2 \cdot \sum_{k=1}^{20} x_k - 20 \cdot \frac{153}{4} = 2 \cdot 4 - 5 \cdot 153 = -757$$