Klassen WI06ab **MLAN1/2 Nach–Klausur** 4. Juli 2007

Name:

Aufgabe 1

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda - 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \lambda + 1 \\ \lambda + 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 + 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Determinante von A in Abhängigkeit von λ.

b) Für welche Werte von $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $det(A) = 0$?

c) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist ein lineares Gleichungssystem, das A als Koeffizientenmatrix hat, eindeutig lösbar?

Aufgabe 2

Student "Tüftler" behauptet, dass er $\gamma \neq 0$ so wählen könne, dass die durch

(1) $$x_{k+1} = x_k - \gamma\,(x_k^2 - 3) \qquad x_0 = 1.7$$

definierte Folge $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ gegen $s = \sqrt{3}$ konvergiert.

a) Was ist hier $F(x)$?

b) Wie muss er $[a, b]$ wählen, damit er den Satz von Banach über das Iterationsverfahren überprüfen kann?

c) Wie muss er γ wählen?

b) und c) *mit* Begründung, Satz von Banach.

Aufgabe 3

Gegeben sind die beiden Schwingungen

$$y_1(t) = -2\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right),$$
$$y_2(t) = +3\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right).$$

a) Bestimmen Sie mit Hilfe von *Zeigern* die Überlagerung

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi).$$

Graphische Darstellung, Einheiten 2 Häuschen auf beiden Achsen.

b) Für welches $t > 0$ ist $y(t)$ zum zweiten Mal Null?

bitte wenden

Aufgabe 4

Gegeben: $\vec{a}$ ein Vektor der Länge 2 und $\vec{b}$ ein Vektor der Länge 3.

a) Welchen kleinsten Wert kann $\vec{a} \cdot \vec{b}$ annehmen? Gegenseitige Lage der beiden Vektoren? (*mit* Begründung)

b) Welchen Wert kann $|\vec{a} \times \vec{b}|$ maximal annehmen? Gegenseitige Lage der beiden Vektoren? (*mit* Begründung)

c) Gegeben ist eine $n \times n-$ Matrix A für die $A^T = -A$ erfüllt ist (n ungerade).
Gesucht ist die Determinante von A.
Tipp: Betrachten Sie zuerst $n = 3$, *nicht* rechnen, überlegen!

Aufgabe 5

Betrachten Sie die Quadraturformel

$$Q = \sum_{k=0}^{2} w_k \, f(\xi_k) \qquad \text{mit} \quad \xi_k = 0,\ \frac{h}{2},\ h. \tag{2}$$

im Intervall $[0, h]$.

a) Bestimmen Sie die Gewichte w_k in (2) so, dass alle Polynome bis und mit Grad 2 exakt integriert werden.

b) Setzen Sie in (2) speziell $h = 1$, um

$$I = \int_a^b f(x)\, dx,$$

mit Hilfe von (2) numerisch zu integrieren. Dabei sind $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$ und $f(x) = \sin(x)$.
Welchen absoluten bzw. relativen Fehler machen Sie dabei?

Aufgabe 6

Eine Pyramide hat die Grundfläche ABC mit $A(-1, 2, -1)$, $B(-1, 7, 2)$, $C(4, 0, 2)$ und die Spitze $S(a, 3, 3)$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Für welche Werte des Parameters $a \in \mathbb{R}$ bilden die Kantenvektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AS}$ ein Rechtssystem?

b) Sei jetzt $a = 4$: Bestimmen Sie denjenigen Normalvektor der Seitenfläche BCS, der nach aussen zeigt und dessen Länge gleich dem Flächeninhalt dieser Seitenfläche ist.

Viel Glück!

Aufgabe 7

Gegeben: Gerade $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, sowie die Punkte $A(0,3,9)$, $B(-2,5,6)$ und $C(-4,7,3)$.

Gesucht sind:

- Schwerpunkt S des Dreiecks ABC.
- Gerade $g_1 \parallel g$ durch S.
- Länge der zwischen π_1 und π_2 liegenden Strecke auf g_1.

Aufgabe 8

Im Würfel $ABCDEFGH$ ist J der Mittelpunkt von HE. J wird mit einem Punkt K der Körperdiagonalen AG verbunden, wobei $\overline{AK} = \frac{1}{6}\,\overline{AG}$. Die Gerade $g = g(J,K)$ schneidet die Ebene $ABCD$ in L.
Schreiben Sie $\overrightarrow{AL}$ als Linearkombination von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$
Lös: $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{5}\,\overrightarrow{AB} + \frac{1}{10}\,\overrightarrow{AD}$

Aufgabe 9 *LR - Zerlegung, Diagonal-Strategie*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die $LR-$Zerlegung von A mit dem Gauss-Algorithmus, **ohne** Permutationen. (entstehende Brüche vollständig gekürzt)

b) Lösen Sie mit Hilfe dieser Zerlegung das lineare Gleichungssystem $Ax = b$.

Aufgabe 10

Seien $L =$ eine untere $n \times n-$ Dreiecksmatrix, d.h. $l_{ij} = 0$, falls $i < j$ und
$R =$ eine obere $n \times n-$ Dreiecksmatrix, d.h. $r_{ij} = 0$, falls $i > j$.

a) Was ensteht bei der Multiplikation $L \cdot R$, wieviele Elemente sind von Null verschieden?

b) Bestimmen Sie den Rechenaufwand ($=$ Anzahl Multiplikationen) bei der Multiplikation in a)

MLAN1/2 Lösungen Nach–Klausur 04.07.07

Lösung 1

a)

$$
\begin{aligned}
|A| &= (\lambda+7)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda+1 \\ 0 & \lambda^2+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+7)(\lambda-2)\begin{vmatrix} 0 & 2 & \lambda+1 \\ \lambda^2+1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -(\lambda+7)(\lambda-2)(\lambda^2+1)\begin{vmatrix} 2 & \lambda+1 \\ \lambda-1 & 1 \end{vmatrix} \\
(3) \qquad &= -(\lambda+7)(\lambda-2)(\lambda^2+1)\left\{3-\lambda^2\right\}
\end{aligned}
$$

b) (3) ist genau dann Null, falls $\lambda_1 = -7$, $\lambda_2 = 2$ oder $\lambda_{3.4} = \pm\sqrt{3}$.

c) Falls $|A| \neq 0$ (Rang $r = 5$), d.h. falls $\lambda \neq -7$ und $\lambda \neq 2$ und $\lambda \neq \pm\sqrt{3}$.

Lösung 2

a) Fixpunktiteration $x = F(x)$, wobei $F(x) = x - \gamma(x^2 - 3)$, $\gamma \neq 0$.

b) Wähle $I = [1, 2]$, denn x_0 muss in I sein.

c) $F(1) = 1 + 2\,\gamma$, $F(2) = 2 - \gamma$ und $F'(x) = 1 - 2\,\gamma\, x$
Folgende Ungleichungen müssen gelten (Banach'scher Fixpunktsatz):

i) $1 < 1 + 2\gamma < 2 \Longrightarrow 0 < \gamma < \frac{1}{2}$ und $1 < 2 - \gamma < 2 \Longrightarrow 0 < \gamma < 1$

ii) $F(x)$ ist ein Polynom zweiten Grades, also stetig.

iii) $|1 - 2\,\gamma\, x| < 1 \Longrightarrow 0 < \gamma < \frac{1}{2}$, (Fallunterscheidung!)

- $1 - 2\gamma x > 0 : 0 < 2\gamma x \Longrightarrow 0 < \gamma$, da $x > 0$.
- $1 - 2\gamma x < 0 : \gamma x < 1 \Longrightarrow \gamma < \frac{1}{x} \Longrightarrow \gamma < \frac{1}{2}$, da $x \in [1, 2]$.

Alle drei Ungleichungen sind erfüllt für $0 < \gamma < \frac{1}{2}$.
Wähle z.B. $\gamma := \frac{1}{3}$ damit i), ii) und iii) erfüllt sind.

Lösung 3

$\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$

a) Graphik mit: $x_1 = -2\,\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ und $y_1 = -1$,

analog : $x_2 = -3\,\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2}$ und $y_2 = 3\,\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\,\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Damit erhalten wir $\tan(\varphi) = \left(\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}\right) = -\left(\frac{3\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}+3}\right) \Longrightarrow \varphi = -\arctan\left(\frac{3\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}+3}\right) + \pi$

(zweiter Quadrant!)

$A^2 = (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 \Longrightarrow A = \sqrt{13}$.

b) Mit Hilfe der Graphik: $\omega t + \varphi = 2\pi$ und damit $t = \frac{1}{\omega}(2\pi - \varphi) = \frac{1}{\omega}\left[(\pi + \arctan\left(\frac{3\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}+3}\right)\right]$.

Lösung 4

a) $(\vec{a}\cdot\vec{b})_{min} = -6$, d.h. $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \pi$, $\vec{a}$ und $\vec{b}$ entgegengesetzt.

b) $|\vec{a}\times\vec{b}|_{max} = 6$, d.h. $\vec{a}\perp\vec{b}$.

c) $det(A) = det(A^T) = (-1)^n \cdot det(A) = -det(A)$, da n ungerade. $\Longrightarrow det(A) = 0$.

Lösung 5

a) zu lösendes Gleichungssystem:

$$(4) \qquad \left\{\begin{array}{ccccccc} w_0 & + & w_1 & + & w_2 & = & h \\ & & \frac{h}{2}w_1 & + & hw_2 & = & \frac{h^2}{2} \\ & & \frac{h^2}{4}w_1 & - & h^2 w_2 & = & \frac{h^3}{3} \end{array}\right.$$

Lösung von (4): $w_0 = w_2 = \frac{h}{6}$ und $w_1 = \frac{4h}{6}$, mit dem Gauss-Algorithmus (ein Schritt und Rückwärtseinsetzen).

b) $[0,1] \longrightarrow [0,\frac{\pi}{2}]$, wobei $x = x(\xi) = m\xi + q$. Hier $x = \frac{\pi}{2}\cdot\xi$, $0 \le \xi \le 1$.

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx \approx Q = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\sin(0) + 4\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{12}\left(2\sqrt{2}+1\right) \approx 1.0023.$

Fehler: absoluter Fehler $\Delta I = |Q - I| = \left|\frac{\pi}{12}\left(2\sqrt{2}+1\right) - 1\right| \approx 0.0023$ und

relativer Fehler $\delta I = \frac{\Delta I}{I} = \Delta I$, da $I = 1$. Relativer Fehler in Prozenten: 0.228%!!

Lösung 6

a) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{AS}$ bilden ein Rechtssystem, falls $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} > 0$.

Mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} a+1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

erhalten wir $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = 21a - 64 > 0 \Longrightarrow a > \frac{64}{21}$.

b) $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Normalvektor der Seitenfläche der Punkte BCS, der nach aussen zeigt:

$\vec{n} = \overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 15 \end{pmatrix}$, der gesuchte Vektor ist somit $\vec{n}_{\text{ges}} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 15 \end{pmatrix}$ Normierung!

alte Lösungen

Lösung 7

a) Mit dem Gauss-Algorithmus: Endschema:

x	y	z	1
2	3	1	0
.	2	4	0
.	.	3	0

d.h. der Rang $r = 3$, d.h. die drei Vektoren sind linear unabhängig.

b)

$$\vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung 8

a) i)

ii)

b)

Lösung 9

Gauss-Algorithmus

Schema nach einem Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	$4 - \frac{a^2}{2}$	$-2a$	$1 - 2a$

Schema nach zwei Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	.	$8 - 2a - a^2$	$7 - 2a - \frac{3}{4}\,a^2$

a)

b)

c)

d)

Lösung 10

a) $F \in g$, d.h. $F(-3+\mu, -3+7\mu, 1+3\mu)$ und damit $\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 5-\mu \\ 6-7\mu \\ 4-3\mu \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a} \cdot \overrightarrow{FA} = 0 \Longrightarrow \mu = 1$

und damit $F(-2, 4, 4)$. Also $g' : \; \vec{r} = \overrightarrow{0A} + \mu \overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{0A'} = \overrightarrow{0A} + 2\overrightarrow{AF} \Longrightarrow A'(-6,5,3)$

Lösung 11

Gauss-Algorithmus, Endschema:

0	0	1	-1	-2	1
1	0	0	-1	-5	6
0	1	0	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{27}{5}$

a)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{27}{5} \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) erster Schritt: $Lc = Pb$, wobei $Pb = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 27 \end{pmatrix} \Longrightarrow c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 27 \end{pmatrix}$

zweiter Schritt: $Rc = x \Longrightarrow x = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$

Lösung 12

a) $g:\ \vec{r} = \overrightarrow{0P_0} + \mu\vec{a}$

$E_1:\ \vec{r} = \overrightarrow{0A} + \alpha\vec{a} + \beta\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und damit

$E_1:\ 4x + 6y + 3z = 15$

b) $V = \frac{h}{3}G$: Schnittpunkte der Ebene E_1 mit den Koordinatenachsen und $z = -3$ liefert die Punkte $(0,0,-3)$, $(0,0,5)$, $(6,0,-3)$, $(0,4,-3)$ und somit $h = 8$ und $G = 12$ woraus $V = 32$ resultiert.

alte Lösungen

Lösung 13

a)

b) Endschema:

x_1	x_2	x_3	x_4	1
1	0	1	-2	2
.	1	-2	3	-1
.	.	7	-6	5
.	.	.	.	2

Das Glgsyst hat keine Lösung, da $r = 3$ und die letzte Zeile $0 = 2$ ein Widerspruch darstellt!

Lösung 14

Endschema:

b_{11}	b_{12}	b_{21}	b_{22}	1
2	-1	1	0	-3
.	5	0	1	12
.	.	-1	-1	-5
.	.	.	2	-6

also $b_{22} = -3$, $b_{21} = 8$, $b_{12} = 3$ und $b_{11} = -4$

$B = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$, das gegebene Problem hat genau eine Lösung.

Lösung 15

Endschema:

x	y	z	1
2	3	1	1
.	1	$(2t-1)$	-1
.	.	$(1-6t)(1-2t)$	$3(1-2t)$

a) $t \neq \frac{1}{2}$ und $t \neq \frac{1}{6}$, Rang $r = 3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{1-6t} \begin{pmatrix} -4-3t \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) $t = \frac{1}{6}$, letzte Zeile: $0 = 2$ ist ein Widerspruch!

c) $t = \frac{1}{2}$, Rang $r = 2$, $z = \mu =$ freier Parameter, $y = -1$ und $x = 2 - \frac{\mu}{2}$ und somit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}$$

Lösung 16

a) $s_a = \sum\limits_{k=1}^{10} \left(k \cdot \sum\limits_{n=1}^{2k} n \right) = \sum\limits_{k=1}^{10} k \cdot \frac{2k(2k+1)}{2} = 2 \cdot \sum\limits_{k=1}^{10} k^3 + \sum\limits_{k=1}^{10} k^2 = 2 \cdot \left(\frac{10 \cdot 11}{2}\right)^2 + \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 6050 + 385 = 6435$

b) $s_b = \sum_{n=1}^{N} \left((a-1) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^k \right) = \sum_{n=1}^{N} (a^n - 1) = a \cdot \sum_{n=0}^{N-1} a^{n-1} - N = a \cdot \frac{a^N - 1}{a-1} - N$

Lösung 17

$$\sum_{l=1}^{15} x_l = 20 \qquad \sum_{l=1}^{15} x_l^2 = 25 \quad \text{und damit} \qquad s = \sum_{k=1}^{15} (x_k - 80) = 20 - 15 \cdot 120 = -1780$$

Lösung 18

$$s_N = 2 \cdot \sum_{n=1}^{N} \left\{ \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} \right\} = 3 \cdot \sum_{n=1}^{N} n^2 + \sum_{n=1}^{N} n = N(N+1)^2$$

Lösung 19

$$\sum_{j=1}^{20} x_j = 4 \qquad \sum_{j=1}^{20} x_j^2 = \frac{3}{4} \qquad -3 \cdot \sum_{j=1}^{20} \left(x_j^2 - 2x_j + 1\right) = -3 \cdot \frac{3}{4} + 6 \cdot 4 - 3 \cdot 20 = -\frac{153}{4}$$

$$s = 2 \cdot \sum_{k=1}^{20} x_k - 20 \cdot \frac{153}{4} = 2 \cdot 4 - 5 \cdot 153 = -757$$