Klassen WI06ab **MLAN2 Nach–Klausur** ??. Juli 2007

Name:

Aufgabe 1

a) Wie gross muss n sein, damit $\sum\limits_{k=1}^{n} (k+4) = 95$?

b) $s_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \left(\sum\limits_{k=n+1}^{2n} 2k \right)$, Resultat so einfach wie möglich.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie in den folgenden Gleichungen jeweils die Matrix X:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X + 2 \cdot X + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3

Man untersuche, ob die Gerade g und die Ebene E parallel sind. Wenn ja, bestimme man den Abstand von g zu E.

$$g: \ \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R} \qquad E: \ \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 4

$H(a) = \sqrt{a} - \sqrt{a+3}$ für $a > 0$ und a gross.

a) i) Bestimmen Sie die Kondition von H für $a \longrightarrow \infty$.

   ii) Kann die Auslöschung für $H(a)$ vermieden werden? (*mit* Begründung) Wenn ja, wie?

b) Lösen Sie $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ für $x \in [-\pi, 2\pi]$.

bitte wenden

Aufgabe 5

a) Gegeben ist die Matrix

$$W = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Fassen Sie die obige Matrix als Tableau eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ auf, das für die eine rechte Seite b gelöst wurde, und beantworten Sie die folgenden Fragen:

- Ist das gegebene Tableaux in Zeilenstufenform `ref` oder gar in reduzierter Zeilenstufenform `rref`? Geben Sie die jeweilige Form an.
- Wie gross ist der Rang der entsprechenden System-Matrix?
- Geben Sie die Lösungsmenge an.

b) Gegeben seien die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad d = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ d_3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie d_3 so, dass diese Vektoren linear abhängig werden.

Aufgabe 6

Stellen Sie eine Parameterdarstellung sowie eine Koordinatengleichung der Ebene E auf, die durch die erste Spur

$s_1 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und die zweite Spur $s_2 : \; y - z - 1 = 0$ gegeben ist.

Wie gross sind die Achsenabschnitte?

Aufgabe 7

Gegeben: Gerade $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, sowie die Punkte $A(0,3,9)$, $B(-2,5,6)$ und $C(-4,7,3)$.

Gesucht sind:

- Schwerpunkt S des Dreiecks ABC.
- Gerade $g_1 \parallel g$ durch S.
- Länge der zwischen π_1 und π_2 liegenden Strecke auf g_1.

Aufgabe 8

Im Würfel $ABCDEFGH$ ist J der Mittelpunkt von HE. J wird mit einem Punkt K der Körperdiagonalen AG verbunden, wobei $\overline{AK} = \frac{1}{6}\,\overline{AG}$. Die Gerade $g = g(J,K)$ schneidet die Ebene $ABCD$ in L.
Schreiben Sie $\overrightarrow{AL}$ als Linearkombination von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$
Lös: $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{5}\,\overrightarrow{AB} + \frac{1}{10}\,\overrightarrow{AD}$

Aufgabe 9 *LR - Zerlegung, Diagonal-Strategie*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die $LR-$Zerlegung von A mit dem Gauss-Algorithmus, **ohne** Permutationen. (entstehende Brüche vollständig gekürzt)

b) Lösen Sie mit Hilfe dieser Zerlegung das lineare Gleichungssystem $Ax = b$.

Aufgabe 10

Seien $L =$ eine untere $n \times n-$ Dreiecksmatrix, d.h. $l_{ij} = 0$, falls $i < j$ und
$R =$ eine obere $n \times n-$ Dreiecksmatrix, d.h. $r_{ij} = 0$, falls $i > j$.

a) Was ensteht bei der Multiplikation $L \cdot R$, wieviele Elemente sind von Null verschieden?

b) Bestimmen Sie den Rechenaufwand ($=$ Anzahl Multiplikationen) bei der Multiplikation in a)

MLAN1   Lösungen Nach–Klausur   23.02.07

Lösung 1

a) Mit dem Gauss-Algorithmus: Endschema:

x	y	z	1
2	3	1	0
.	2	4	0
.	.	3	0

d.h. der Rang $r = 3$, d.h. die drei Vektoren sind linear unabhängig.

b)

$$\vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung 2

a) i)

ii)

b)

Lösung 3

Gauss-Algorithmus

Schema nach einem Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	$4 - \frac{a^2}{2}$	$-2a$	$1 - 2a$

Schema nach zwei Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	.	$8 - 2a - a^2$	$7 - 2a - \frac{3}{4}\,a^2$

a)

b)

c)

d)

Lösung 4

a) $F \in g$, d.h. $F(-3+\mu, -3+7\mu, 1+3\mu)$ und damit $\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 5-\mu \\ 6-7\mu \\ 4-3\mu \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a} \cdot \overrightarrow{FA} = 0 \Longrightarrow \mu = 1$

und damit $F(-2, 4, 4)$. Also $g' : \ \vec{r} = \overrightarrow{0A} + \mu\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{0A'} = \overrightarrow{0A} + 2\overrightarrow{AF} \Longrightarrow A'(-6,5,3)$

Lösung 5

Gauss-Algorithmus, Endschema:

0	0	1	-1	-2	1
1	0	0	-1	-5	6
0	1	0	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{27}{5}$

a)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{27}{5} \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) erster Schritt: $Lc = Pb$, wobei $Pb = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 27 \end{pmatrix} \Longrightarrow c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 27 \end{pmatrix}$

zweiter Schritt: $Rc = x \Longrightarrow x = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$

Lösung 6

a) $g: \ \vec{r} = \overrightarrow{0P_0} + \mu\vec{a}$

$E_1: \ \vec{r} = \overrightarrow{0A} + \alpha\vec{a} + \beta\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und damit

$E_1: \ 4x + 6y + 3z = 15$

b) $V = \frac{h}{3}G$: Schnittpunkte der Ebene E_1 mit den Koordinatenachsen und $z = -3$ liefert die Punkte $(0,0,-3)$, $(0,0,5)$, $(6,0,-3)$, $(0,4,-3)$ und somit $h = 8$ und $G = 12$ woraus $V = 32$ resultiert.

alte Lösungen

Lösung 7

a)

b) Endschema:

x_1	x_2	x_3	x_4	1
1	0	1	-2	2
.	1	-2	3	-1
.	.	7	-6	5
.	.	.	.	2

Das Glgsyst hat keine Lösung, da $r = 3$ und die letzte Zeile $0 = 2$ ein Widerspruch darstellt!

Lösung 8

Endschema:

b_{11}	b_{12}	b_{21}	b_{22}	1
2	-1	1	0	-3
.	5	0	1	12
.	.	-1	-1	-5
.	.	.	2	-6

also $b_{22} = -3$, $b_{21} = 8$, $b_{12} = 3$ und $b_{11} = -4$

$B = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$, das gegebene Problem hat genau eine Lösung.

Lösung 9

Endschema:

x	y	z	1
2	3	1	1
.	1	$(2t-1)$	-1
.	.	$(1-6t)(1-2t)$	$3(1-2t)$

a) $t \neq \frac{1}{2}$ und $t \neq \frac{1}{6}$, Rang $r = 3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{1-6t} \begin{pmatrix} -4-3t \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) $t = \frac{1}{6}$, letzte Zeile: $0 = 2$ ist ein Widerspruch!

c) $t = \frac{1}{2}$, Rang $r = 2$, $z = \mu =$ freier Parameter, $y = -1$ und $x = 2 - \frac{\mu}{2}$ und somit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R}$$

Lösung 10

a) $s_a = \sum\limits_{k=1}^{10} \left(k \cdot \sum\limits_{n=1}^{2k} n \right) = \sum\limits_{k=1}^{10} k \cdot \frac{2k(2k+1)}{2} = 2 \cdot \sum\limits_{k=1}^{10} k^3 + \sum\limits_{k=1}^{10} k^2 = 2 \cdot \left(\frac{10 \cdot 11}{2}\right)^2 + \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 6050 + 385 = 6435$

b) $s_b = \sum_{n=1}^{N} \left((a-1) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^k \right) = \sum_{n=1}^{N} (a^n - 1) = a \cdot \sum_{n=0}^{N-1} a^{n-1} - N = a \cdot \frac{a^N - 1}{a-1} - N$

Lösung 11

$$\sum_{l=1}^{15} x_l = 20 \qquad \sum_{l=1}^{15} x_l^2 = 25 \quad \text{und damit} \qquad s = \sum_{k=1}^{15} (x_k - 80) = 20 - 15 \cdot 120 = -1780$$

Lösung 12

$$s_N = 2 \cdot \sum_{n=1}^{N} \left\{ \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} \right\} = 3 \cdot \sum_{n=1}^{N} n^2 + \sum_{n=1}^{N} n = N(N+1)^2$$

Lösung 13

$$\sum_{j=1}^{20} x_j = 4 \qquad \sum_{j=1}^{20} x_j^2 = \frac{3}{4} \qquad -3 \cdot \sum_{j=1}^{20} \left(x_j^2 - 2x_j + 1\right) = -3 \cdot \frac{3}{4} + 6 \cdot 4 - 3 \cdot 20 = -\frac{153}{4}$$

$$s = 2 \cdot \sum_{k=1}^{20} x_k - 20 \cdot \frac{153}{4} = 2 \cdot 4 - 5 \cdot 153 = -757$$