Klasse WI06b **MLAN2 erste-Klausur** 02. Mai 2007

Name:

Aufgabe 1

a) $\sin\left(\frac{3x}{2}-2\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, *alle* Lösungen, exakt.

b) Drücken Sie $\cos(4x)$ allein mit $\cos(x)$ aus.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie den Abstand folgender windschiefer Geraden g und h

$$g:\ \vec{r}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}\qquad h=h(A,B),$$

wobei $A(-2,0,4)$ und $B(-1,0,2)$.
(Abstand *inklusive* der Fusspunkte).

Aufgabe 3

Gegeben ist die Matrix

$$A(\alpha)=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&2&7&8\\2&3&\alpha&7\\1&3&4&0\end{pmatrix}$$

mit einem Parameter α. Die Determinante von $A(\alpha)$ wird mit $d(\alpha)$ bezeichnet.

a) Bestimmen Sie $d(\alpha)$ in Abhängigkeit von α aus den beiden bekannten Werten $d(-1)=58$ und $d(3)=30$.

b) Für welche $\alpha\in\mathbb{R}$ ist $A(\alpha)$ invertierbar?

c) Für welche $\alpha\in\mathbb{R}$ ist ein lineares Gleichungssystem mit $A(\alpha)$ als Koeffizientenmatrix eindeutig lösbar?

bitte wenden

Aufgabe 4

Lösen Sie folgende goniometrische Gleichungen:

a) $6\sin(x) + 1 = \frac{1}{\sin(x)}$

b) $\cos(2u) = 1 - \tan(u)$

Aufgabe 5

a) Bestimmen Sie die Kondition des Problems

$$H(x) = \sqrt{2x^2 - 3} - \sqrt{2x^2 - 1} \tag{1}$$

für $|x|$ gross.

b) Vermeiden Sie, falls möglich, die Auslöschung in (1).

Aufgabe 6

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem $Cx = d$ mit der Matrix $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 10^{-5} & 10^{-5} \end{pmatrix}$ und der rechten Seite $d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die exakte Lösung ist $x_e = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Kondition $\kappa(C)$ von C in der $\|\ldots\|_\infty$ – Norm.

b) Betrachten Sie nun für kleine positive ε die folgenden rechten Seiten:

b1) $\hat{d}_1 = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}$ b2) $\hat{d}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$

und berechnen Sie die entsprechenden Lösungen $\hat{x}_1$ und $\hat{x}_2$.

c) Bestimmen Sie für die beiden Lösungen aus b) die relativen Fehler $\|\delta\hat{x}_1\|_\infty$ und $\|\delta\hat{x}_2\|_\infty$.
Vergleichen Sie diese relativen Fehler mit der theoretisch hergeleiteten Abschätzung. Interpretation?

WI06b MLAN2 Lösungen erste Klausur 02.05.07

Lösung 1

a) $\frac{3x}{2} - 2 = \frac{\pi}{3} + k\,2\pi \Longrightarrow x_k = \left(\frac{2\pi}{9} + \frac{4}{3}\right) + k\,\frac{4\pi}{3}$
   oder
   $\frac{3x}{2} - 2 = \frac{2\pi}{3} + k\,2\pi \Longrightarrow x_k = \left(\frac{4\pi}{9} + \frac{4}{3}\right) + k\,\frac{4\pi}{3}$

b) $\cos(4x) = 2 \cdot \cos^2(2x) - 1 = 2 \cdot (2\,\cos^{(x)} - 1)^2 - 1 = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1$

Lösung 2

Die Ursprungsgerade h wird von $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ aufgespannt.
Transversale t von g und h, die gleichzeitig auf beiden Geraden senkrecht steht, d.h. für den Richtungsvektor $\vec{a}$ von t muss gelten: $\vec{a} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{a} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{a} = \mu \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$
Ebene $E_1 = E_1(h, \vec{a}):\ 2x - 20y + z = 0$ und damit $P = g \cap E_1 = (\frac{7}{9}, \frac{1}{9}, \frac{6}{9})$ ein erster Fusspunkt von t
$\Rightarrow t:\ \vec{r} = \overrightarrow{0P} + \mu\vec{a}$ und damit $Q = t \cap h = (-\frac{1}{9}, 0, \frac{2}{9})$ der zweite Fusspunkt von t.
$d = |\overrightarrow{PQ}| = |\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}| = \frac{\sqrt{81}}{9} = 1$

Lösung 3

a) $d(\alpha) = m\alpha + q$, linear in α. $\begin{cases} d(-1) = 58 = -m + q \\ d(3) = 80 = 3m + q \end{cases} \Longrightarrow \quad m = -7 \quad q = 51$
   also: $d(\alpha) = 51 - 7\alpha$

b) $d(\alpha) \neq 0 \Longleftrightarrow \alpha \neq \frac{51}{7}$

c) $d(\alpha) \neq 0 \Longleftrightarrow \alpha \neq \frac{51}{7}$

Lösung 4

a) $6u^2 + u - 1 = 0,\ u := \sin(x),\ u_{1.2} = \begin{cases} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$

$\sin(x) = \frac{1}{3} : \begin{cases} x_k = \varphi + k\,2\pi \\ x_k = (\pi - \varphi) + k\,2\pi \end{cases} \qquad \varphi = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$

$\sin(x) = -\frac{1}{2} : \begin{cases} x_k = \frac{7\pi}{6} + k\,2\pi \\ x_k = \frac{11\pi}{6} + k\,2\pi \end{cases}$

b) $\tan(u) = 1 : u_k = \frac{\pi}{4} + k\,\pi$ oder $\sin(u) = 0 : u_k = k\,\pi$

Lösung 5

$H'(x) = \frac{2x\left(\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{2x^2-3}\right)}{\sqrt{2x^2-3}\sqrt{2x^2-1}}$

a)

$$\left|\frac{x}{H(x)} \cdot \frac{2x\left(\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{2x^2-3}\right)}{\sqrt{2x^2-3}\sqrt{2x^2-1}}\right| = \left|\frac{-2x^2}{\sqrt{2x^2-3}\sqrt{2x^2-1}}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{1-\frac{3}{2x^2}}\sqrt{1-\frac{1}{2x^2}}}\right|$$

und damit

$$\kappa_H(x) = \lim_{|x|\to\infty}\left|\frac{x \cdot H'(x)}{H(x)}\right| = 1,$$

d.h. die Auslöschung kann vermieden werden.

b) Ohne Auslöschung: $H(x) = -\frac{2}{\sqrt{2x^2-3}+\sqrt{2x^2-1}}$ nach Erweiterung mit $\sqrt{2x^2-3}+\sqrt{2x^2-1}$

Lösung 6

$C^{-1} = (-10^5)\begin{pmatrix} 10^{-5} & -3 \\ -10^{-5} & 2 \end{pmatrix}$

a) Zeilenmaximum: $\|C\|_\infty = 5$ und $\|C^{-1}\|_\infty = 1 + 3\cdot 10^5$ und damit $\kappa(C) = 5\cdot(1+3\cdot 10^5)$

b) b1) $\hat{x}_1 = C^{-1}\hat{d}_1 = (1+\varepsilon)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 + \Delta x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b2) $\hat{x}_2 = C^{-1}\hat{d}_2 = \begin{pmatrix} -1+3\varepsilon 10^5 \\ 1-2\varepsilon 10^5 \end{pmatrix} = x_2 + \Delta x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon 10^5\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\le k\le 2}|x_k|$, absolut grösste Komponente.

$\|\delta\hat{x}_1\|_\infty = \frac{\|\Delta x_1\|}{\|x_1\|} = \varepsilon$, und $\|\delta\hat{d}_1\|_\infty = \frac{\|\Delta d_1\|}{\|d_1\|} = \varepsilon$, da $\hat{d}_1 = d_1 + \Delta d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}$

$\|\delta\hat{x}_2\|_\infty = \frac{\|\Delta x_2\|}{\|x_2\|} = 3\,\varepsilon\,10^5$, und $\|\delta\hat{d}_2\|_\infty = \frac{\|\Delta d_2\|}{\|d_2\|} = \varepsilon$, da $\hat{d}_2 = d_2 + \Delta d_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$

theoretische Schranke: $\|\delta\hat{x}_1\|_\infty \le \kappa(A)\cdot\|\delta\hat{b}_1\|_\infty$ ist zu pessimistisch, sie wird nicht angenommen.

$\|\delta\hat{x}_2\|_\infty \le \kappa(A)\cdot\|\delta\hat{b}_2\|_\infty$ hingegen ist realistisch, da der relative Fehler von $\hat{x}_2$ von $O(10^5)$.

Aufgabe 7

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda-2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \lambda+1 \\ \lambda+7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Determinante von Ain Abhängigkeit von λ.

b) Für welche Werte von $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $det(A) = 0$?

Aufgabe 8

Aufgabe 9

Gegeben: Gerade $g:\ \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, sowie die Punkte $A(0,3,9)$, $B(-2,5,6)$ und $C(-4,7,3)$.

Gesucht sind:

- Schwerpunkt S des Dreiecks ABC.
- Gerade $g_1 \parallel g$ durch S.
- Länge der zwischen π_1 und π_2 liegenden Strecke auf g_1.

a) Mit dem Gauss-Algorithmus: Endschema:

x	y	z	1
2	3	1	0
.	2	4	0
.	.	3	0

d.h. der Rang $r = 3$, d.h. die drei Vektoren sind linear unabhängig.

b)

$$\vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung 7

a) i)

ii)

b)

Lösung 8

Gauss-Algorithmus

Schema nach einem Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	$4-\frac{a^2}{2}$	$-2a$	$1-2a$

Schema nach zwei Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	.	$8-2a-a^2$	$7-2a-\frac{3}{4}\,a^2$

a)

b)

c)

d)

Lösung 9

a) $F \in g$, d.h. $F(-3+\mu, -3+7\mu, 1+3\mu)$ und damit $\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 5-\mu \\ 6-7\mu \\ 4-3\mu \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a}\cdot\overrightarrow{FA} = 0 \Longrightarrow \mu = 1$

und damit $F(-2,4,4)$. Also $g':\ \vec{r} = \overrightarrow{0A} + \mu\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{0A'} = \overrightarrow{0A} + 2\overrightarrow{AF} \Longrightarrow A'(-6,5,3)$

Lösung 10

Gauss-Algorithmus, Endschema:

0	0	1	-1	-2	1
1	0	0	-1	-5	6
0	1	0	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{27}{5}$

a)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{27}{5} \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) erster Schritt: $Lc = Pb$, wobei $Pb = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 27 \end{pmatrix} \Longrightarrow c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 27 \end{pmatrix}$

zweiter Schritt: $Rc = x \Longrightarrow x = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$

Lösung 11

a) $g: \ \vec{r} = \overrightarrow{0P_0} + \mu\vec{a}$

$$E_1: \ \vec{r} = \overrightarrow{0A} + \alpha\vec{a} + \beta\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ und damit

$E_1: \ 4x + 6y + 3z = 15$

b) $V = \frac{h}{3}G$: Schnittpunkte der Ebene E_1 mit den Koordinatenachsen und $z = -3$ liefert die Punkte $(0, 0, -3)$, $(0, 0, 5)$, $(6, 0, -3)$, $(0, 4, -3)$ und somit $h = 8$ und $G = 12$ woraus $V = 32$ resultiert.

alte Lösungen

Lösung 12

a)

b) Endschema:

x_1	x_2	x_3	x_4	1
1	0	1	-2	2
.	1	-2	3	-1
.	.	7	-6	5
.	.	.	.	2

Das Glgsyst hat keine Lösung, da $r = 3$ und die letzte Zeile $0 = 2$ ein Widerspruch darstellt!

Lösung 13

Endschema:

b_{11}	b_{12}	b_{21}	b_{22}	1
2	-1	1	0	-3
.	5	0	1	12
.	.	-1	-1	-5
.	.	.	2	-6

also $b_{22} = -3$, $b_{21} = 8$, $b_{12} = 3$ und $b_{11} = -4$

$B = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$, das gegebene Problem hat genau eine Lösung.

Lösung 14

Endschema:

x	y	z	1
2	3	1	1
.	1	$(2t-1)$	-1
.	.	$(1-6t)(1-2t)$	$3(1-2t)$

a) $t \neq \frac{1}{2}$ und $t \neq \frac{1}{6}$, Rang $r = 3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{1-6t} \begin{pmatrix} -4-3t \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) $t = \frac{1}{6}$, letzte Zeile: $0 = 2$ ist ein Widerspruch!

c) $t = \frac{1}{2}$, Rang $r = 2$, $z = \mu =$ freier Parameter, $y = -1$ und $x = 2 - \frac{\mu}{2}$ und somit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R}$$

Lösung 15

a) $s_a = \sum\limits_{k=1}^{10}\left(k \cdot \sum\limits_{n=1}^{2k} n\right) = \sum\limits_{k=1}^{10} k \cdot \frac{2k(2k+1)}{2} = 2 \cdot \sum\limits_{k=1}^{10} k^3 + \sum\limits_{k=1}^{10} k^2 = 2 \cdot \left(\frac{10 \cdot 11}{2}\right)^2 + \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 6050 + 385 = 6435$

b) $s_b = \sum\limits_{n=1}^{N}\left((a-1) \cdot \sum\limits_{k=0}^{n-1} a^k\right) = \sum\limits_{n=1}^{N} (a^n - 1) = a \cdot \sum\limits_{n=0}^{N-1} a^{n-1} - N = a \cdot \frac{a^N - 1}{a-1} - N$

Lösung 16

$$\sum_{l=1}^{15} x_l = 20 \qquad \sum_{l=1}^{15} x_l^2 = 25 \quad \text{und damit} \qquad s = \sum_{k=1}^{15} (x_k - 80) = 20 - 15 \cdot 120 = -1780$$

Lösung 17

$$s_N = 2 \cdot \sum_{n=1}^{N} \left\{ \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} \right\} = 3 \cdot \sum_{n=1}^{N} n^2 + \sum_{n=1}^{N} n = N(N+1)^2$$

Lösung 18

$$\sum_{j=1}^{20} x_j = 4 \qquad \sum_{j=1}^{20} x_j^2 = \frac{3}{4} \qquad -3 \cdot \sum_{j=1}^{20} \left(x_j^2 - 2x_j + 1 \right) = -3 \cdot \frac{3}{4} + 6 \cdot 4 - 3 \cdot 20 = -\frac{153}{4}$$

$$s = 2 \cdot \sum_{k=1}^{20} x_k - 20 \cdot \frac{153}{4} = 2 \cdot 4 - 5 \cdot 153 = -757$$