Klasse WI06b **MLAN2 zweite-Klausur** 13. Juni 2007

Name:

Aufgabe 1

Gegeben sind die beiden harmonischen Schwingungen

$$(1) \qquad y = f_1(t) = +3\,\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$(2) \qquad y = f_2(t) = -8\,\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right).$$

a) Bestimmen Sie mit Hilfe von Zeigern die Überlagerung $y = f_1(t) + f_2(t) = f(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$, (graphische Darstellung: Einheiten für beide Achsen 2 Häuschen).

b) Für welches $t > 0$ zeigt der Zeiger der Überlagerung zum ersten Mal in Richtung der Geraden $y = x$.

Aufgabe 2

Die Funktion $f(x) = \cos(x) + \sin(x + \vartheta)$ soll als harmonische Schwingung $y = f(x) = A \cdot \sin(x + \varphi)$ geschrieben werden.

a) Schreiben Sie die Amplitude A als Funktion in ϑ, d.h. $A = A(\vartheta)$.

b) Wie gross wird A maximal?

c) Bestimmen Sie für den Fall b) die zugehörige Phase φ.

Aufgabe 3

a) Gegeben sind eine Ebene $E:\ 6x + 2y - 3z = 14$ und eine Gerade $g = g(A, B)$, wobei $A(22, 21, -12)$ und $B(23, 18, -12)$.
Bestimmen Sie die gegenseitige Lage von E und g (Schnittpunkt S, Schnittwinkel φ).

b) Eine zweite Ebene F hat die Koordinatengleichung $2x + 3y + 6z = 7$.
Bestimmen Sie den Schnittwinkel $\vartheta = \sphericalangle(E, F)$ der beiden Ebenen.

c) Gegeben ist ein weiterer Punkt $M(0, 47, -6)$.
Bestimmen Sie die Abstände von M von den beiden Ebenen. Feststellung?

bitte wenden

Aufgabe 4

Die Gleichung $x^2 - 1 - \cos(x) = 0$ hat eine Lösung im Intervall $[1,\, 1.5]$.
Welche der angegebenen *Iterationsvorschriften* (evtl. auch mehrere) kann man zur Bestimmung dieser Lösung verwenden? (*mit* Begründung, Satz von Banach über das Iterationsverfahren)

a) $x_{k+1} = \dfrac{1 + \cos(x_k)}{x_k}$ b) $x_{k+1} = \sqrt{1 + \cos(x_k)}$

c) Wieviele Schritte müssten Sie für $7-$ stellige Genauigkeit durchführen, falls Sie das angegebene Intervall für eine *Bisektion* verwenden würden?

Aufgabe 5

Gegeben ist die Gleichung

$$x = 0.1\, x^2 + 1 \tag{3}$$

a) Bestimmen Sie die Fixpunkte von (3).

b) Welcher der Fixpunkte ist attraktiv, welcher abstossend? (*mit* Begründung)

c) Bestimmen Sie den abstossenden Fixpunkt mit der Iteration

$$x_{k+1} = F^{-1}(x_k) \qquad x_0 = 8.$$

Wie gross ist der Konvergenzquotient?

Aufgabe 6

Gegeben ist die Gleichung

$$x^2 - 2x - 8 = 0. \tag{4}$$

a) Die Nullstellen von (4) sollen mit der *Regula falsi* bestimmt werden. Wie müssen die entsprechenden Intervalle $[a, b]$ gewählt werden? (graphische Darstellung)

b) Die Methode von *Newton* mit dem Startwert $x_0 = 3$ soll als zweite Methode angewendet werden. Ist für x_0 die Konvergenzbedingung erfüllt? Welche der beiden Nullstellen wird erhalten?

c) Wie müssen Sie x_0 wählen, damit Sie mit Newton die andere Nullstelle erhalten?

WI06b MLAN2 Lösungen zweite Klausur 13.06.07

Lösung 1

a) Graphik, $A = \sqrt{73}$ und $\varphi = \arctan\left(-\frac{5}{11}\right)$

b) $\omega t + \varphi = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow t = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)$

Lösung 2

a) mit Koeffizientenvergleich: $A(\vartheta) = \sqrt{2\left(1 + 2\sin\left(\vartheta\right)\right)}$

b) A ist maximal $\Longleftrightarrow \sin\left(\vartheta\right) = 1$, also $A_{max} = 2$

c) $f(x) = 2 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Longrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

Lösung 3

a) $g\colon \vec{r} = \overrightarrow{0A} + \mu\vec{a} = \begin{pmatrix} 22 \\ 21 \\ -12 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $g \cap E = \{\}$, d.h. kein Schnittpunkt, $g \parallel E$

oder $\vec{a} \perp \vec{n}_E$ und $g \not\subset E$

b) $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$: $\vec{n}_E \cdot \vec{n}_F = 0 \Longrightarrow \vartheta = \frac{\pi}{2}$

c) HNF: $d_E = \frac{|2\cdot 47+(-3)\cdot(-6)-14|}{7} = 14$ und $d_F = \frac{|3\cdot 47+6\cdot(-6)-7|}{7} = 14 \Longrightarrow$ die Abstände sind *gleich*.

Lösung 4

a) $F(x) = \frac{1+\cos(x)}{x}$: i) $F(I) \nsubseteq I$, ii) erfüllt, da Zusammensetzung stetiger Funktionen,

iii) $F'(x) = -\frac{x \cdot \sin(x)+1+\cos(x)}{x^2} \implies |F'(1)| = \sin(1) + 1 + \cos(1) > 1$ ist also verletzt!

D.h. diese Iteration kann nicht verwendet werden.

b) $F(x) = \sqrt{1+\cos(x)}$: i) $F(I) \subseteq I$ ist erfüllt, ii) erfüllt, da Zusammensetzung stetiger Funktionen,

iii) $F'(x) = -\frac{\sin(x)}{2\sqrt{1+\cos(x)}} \implies |F'(x)| < 1$ für alle $x \in [1, 1.5]$.

D.h. diese Iteration kann verwendet werden.

c) $n > \ln\left|\frac{0.5}{5 \cdot 10^{-8}}\right| \cdot \frac{1}{\ln(2)} = \frac{\ln(10^7)}{\ln(2)}$

Lösung 5

a) $x^2 - 10x + 10 = 0$, also $s_1 = 5 + \sqrt{15}$ und $s_2 = 5 - \sqrt{15}$

b) $F(x) = 0.1 \cdot x^2 + 1$ und $F'(x) = 0.2 \cdot x$:

$|F'(s_1)| > 1$, d.h. s_1 ist abstossend und $|F'(s_2)| < 1$, d.h. s_2 ist attraktiv.

c) $F^{-1}(x) = \sqrt{10(x-1)}$ und $\left[F^{-1}(x)\right]' = \frac{5}{\sqrt{10(x-1)}}$ und damit $q = \left[F^{-1}(s_1)\right]' = \frac{5}{\sqrt{10(4+\sqrt{15})}}$

Lösung 6

a) Graphik: Parabel mit den Nullstellen $s_1 = -2$ und $s_2 = 4$.

$[a, b] = [-3, -1]$ für $s_1 = -2$ und $[a, b] = [3, 5]$ für $s_2 = 4$

b) Newton: $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, also $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ mit $F'(x) = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2}$: $|F'(x_0)| = \frac{5}{8} < 1$,

also ist die Konvergenzbeding erfüllt.

$x_1 = \frac{17}{4}$, also haben wir Konvergenz gegen $s_2 = 4$.

c) $x_0 < 1$, allein aus der Graphik.

Aufgabe 7

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda-2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \lambda+1 \\ \lambda+7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Determinante von Ain Abhängigkeit von λ.

b) Für welche Werte von $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $det(A) = 0$?

Aufgabe 8

Aufgabe 9

Gegeben: Gerade $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, sowie die Punkte $A(0,3,9)$, $B(-2,5,6)$ und $C(-4,7,3)$.

Gesucht sind:

- Schwerpunkt S des Dreiecks ABC.
- Gerade $g_1 \parallel g$ durch S.
- Länge der zwischen π_1 und π_2 liegenden Strecke auf g_1.

a) Mit dem Gauss-Algorithmus: Endschema:

x	y	z	1
2	3	1	0
.	2	4	0
.	.	3	0

d.h. der Rang $r = 3$, d.h. die drei Vektoren sind linear unabhängig.

b)

$$\vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung 7

a) i)

ii)

b)

Lösung 8

Gauss-Algorithmus

Schema nach einem Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	$4-\frac{a^2}{2}$	$-2a$	$1-2a$

Schema nach zwei Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	.	$8-2a-a^2$	$7-2a-\frac{3}{4}\,a^2$

a)

b)

c)

d)

Lösung 9

a) $F \in g$, d.h. $F(-3+\mu, -3+7\mu, 1+3\mu)$ und damit $\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 5-\mu \\ 6-7\mu \\ 4-3\mu \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a} \cdot \overrightarrow{FA} = 0 \Longrightarrow \mu = 1$

und damit $F(-2,4,4)$. Also $g' :\ \vec{r} = \overrightarrow{0A} + \mu\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{0A'} = \overrightarrow{0A} + 2\overrightarrow{AF} \Longrightarrow A'(-6,5,3)$

Lösung 10

Gauss-Algorithmus, Endschema:

0	0	1	-1	-2	1
1	0	0	-1	-5	6
0	1	0	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{27}{5}$

a)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{27}{5} \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) erster Schritt: $Lc = Pb$, wobei $Pb = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 27 \end{pmatrix} \Longrightarrow c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 27 \end{pmatrix}$

zweiter Schritt: $Rc = x \Longrightarrow x = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$

Lösung 11

a) $g: \ \vec{r} = \overrightarrow{0P_0} + \mu\vec{a}$

$$E_1: \ \vec{r} = \overrightarrow{0A} + \alpha\vec{a} + \beta\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ und damit

$E_1: \ 4x + 6y + 3z = 15$

b) $V = \frac{h}{3}G$: Schnittpunkte der Ebene E_1 mit den Koordinatenachsen und $z = -3$ liefert die Punkte $(0,0,-3)$, $(0,0,5)$, $(6,0,-3)$, $(0,4,-3)$ und somit $h = 8$ und $G = 12$ woraus $V = 32$ resultiert.

alte Lösungen

Lösung 12

a)

b) Endschema:

x_1	x_2	x_3	x_4	1
1	0	1	-2	2
.	1	-2	3	-1
.	.	7	-6	5
.	.	.	.	2

Das Glgsyst hat keine Lösung, da $r = 3$ und die letzte Zeile $0 = 2$ ein Widerspruch darstellt!

Lösung 13

Endschema:

b_{11}	b_{12}	b_{21}	b_{22}	1
2	-1	1	0	-3
.	5	0	1	12
.	.	-1	-1	-5
.	.	.	2	-6

also $b_{22} = -3$, $b_{21} = 8$, $b_{12} = 3$ und $b_{11} = -4$

$B = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$, das gegebene Problem hat genau eine Lösung.

Lösung 14

Endschema:

x	y	z	1
2	3	1	1
.	1	$(2t-1)$	-1
.	.	$(1-6t)(1-2t)$	$3(1-2t)$

a) $t \neq \frac{1}{2}$ und $t \neq \frac{1}{6}$, Rang $r = 3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{1-6t} \begin{pmatrix} -4-3t \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) $t = \frac{1}{6}$, letzte Zeile: $0 = 2$ ist ein Widerspruch!

c) $t = \frac{1}{2}$, Rang $r = 2$, $z = \mu =$ freier Parameter, $y = -1$ und $x = 2 - \frac{\mu}{2}$ und somit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R}$$

Lösung 15

a) $s_a = \sum\limits_{k=1}^{10}\left(k \cdot \sum\limits_{n=1}^{2k} n\right) = \sum\limits_{k=1}^{10} k \cdot \frac{2k(2k+1)}{2} = 2 \cdot \sum\limits_{k=1}^{10} k^3 + \sum\limits_{k=1}^{10} k^2 = 2 \cdot \left(\frac{10 \cdot 11}{2}\right)^2 + \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 6050 + 385 = 6435$

b) $s_b = \sum\limits_{n=1}^{N}\left((a-1) \cdot \sum\limits_{k=0}^{n-1} a^k\right) = \sum\limits_{n=1}^{N}(a^n - 1) = a \cdot \sum\limits_{n=0}^{N-1} a^{n-1} - N = a \cdot \frac{a^N - 1}{a-1} - N$

Lösung 16

$$\sum_{l=1}^{15} x_l = 20 \qquad \sum_{l=1}^{15} x_l^2 = 25 \quad \text{und damit} \qquad s = \sum_{k=1}^{15}(x_k - 80) = 20 - 15 \cdot 120 = -1780$$

Lösung 17

$$s_N = 2 \cdot \sum_{n=1}^{N} \left\{ \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} \right\} = 3 \cdot \sum_{n=1}^{N} n^2 + \sum_{n=1}^{N} n = N(N+1)^2$$

Lösung 18

$$\sum_{j=1}^{20} x_j = 4 \qquad \sum_{j=1}^{20} x_j^2 = \frac{3}{4} \qquad -3 \cdot \sum_{j=1}^{20} \left(x_j^2 - 2x_j + 1 \right) = -3 \cdot \frac{3}{4} + 6 \cdot 4 - 3 \cdot 20 = -\frac{153}{4}$$

$$s = 2 \cdot \sum_{k=1}^{20} x_k - 20 \cdot \frac{153}{4} = 2 \cdot 4 - 5 \cdot 153 = -757$$