Klasse WI06a **MLAN3 – Schlussprüfung** 21. Januar 2008

Name:

Bewertung: Alle Aufgaben haben dasselbe Gewicht.

Aufgabe 1

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Lösen Sie das Eigenwertproblem von A.

b) Geben Sie eine orthogonale Matrix T an, sodass $D = T^T AT$

Aufgabe 2

Wir betrachten den Vektorraum $V = C[0, 2\pi]$ der stetigen $2\pi-$ periodischen Funktionen. Sei $U \subset V$ ein Unterraum von V mit $U = \text{span}\{1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x)\}$.

a) Wie gross ist die Dimension von U ?

b) Geben Sie die Ableitungen dieser ersten fünf Funktionen als Linearkombination dieser fünf Funktionen an und bestimmen Sie damit die $5 \times 5-$ Abbildungsmatrix D der Ableitung $\mathcal{D}$.

c) Bestimmen Sie Kern und Bild von D.

Aufgabe 3

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < -\frac{\pi}{2} \\ A, & -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases} \tag{1}$$

$f(x)$ wird auf der ganzen reellen Achse $2\pi-$ periodisch fortgesetzt.

a) Graphische Darstellung von $y = f(x)$ für $A = 1$ auf dem Intervall $[-\pi, 3\pi]$.
Einheiten: $\pi \equiv 6$ Häuschen.

b) Bestimmen Sie $a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(kx)\, dx$ für $A \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

c) Bestimmen Sie $b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(kx)\, dx$ für $A \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots$

bitte wenden

Aufgabe 4

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = Ax \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

a) Allgemeine Lösung $x_h(t)$ von (2) durch Entkopplung.

b) Spezielle Lösung von (2) mit x_0 als Anfangsbedingung.

c) Wie müssen die Anfangsbedingen gewählt werden, damit die Lösung $x(t)$ für $t \longrightarrow \infty$ nicht unendlich gross wird?

Aufgabe 5

Gegeben ist die quadratische Form

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 - 6x_1 + 9.$$

$Q(x_1, x_2) = 0$ definiert im $\mathbb{R}^2$ eine Kurve.

a) Um was für eine Kurve handelt es sich hier?

b) Führen Sie die Hauptachsentransformation durch.

c) Graphische Darstellung: Mittelpunkt, Halbachsen, falls vorhanden.

Aufgabe 6

Gegeben sind die drei Basen

$$\Sigma_b : \ b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \ b_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \Sigma_c : \ c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \ c_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \Sigma_e : \ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie die Koordinatentransformation T_{be} von Σ_b nach Σ_e, d.h. $\Sigma_b \longrightarrow \Sigma_e$ an.

b) Geben Sie die Koordinatentransformation T_{ce} von Σ_c nach Σ_e, d.h. $\Sigma_c \longrightarrow \Sigma_e$ an.

c) Geben Sie die Koordinatentransformation T_{bc} von Σ_b nach Σ_c, d.h. $\Sigma_b \longrightarrow \Sigma_c$ an. (Tipp: Umweg über Σ_e)

d) Gegeben ist der Vektor $\vec{a}_b = \overrightarrow{0Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_b$ bzgl. Σ_b.

Gesucht ist dieser Vektor bzgl. der anderen Basen Σ_e und Σ_c.

MLAN3 Lösungen Schlussprüfung 21.01.08

Lösung 1

a) $p_A(\lambda) = (5-\lambda)\{\lambda^2 - 10\lambda + 20\} \stackrel{!}{=} 0$, $\lambda_1 = 5$ und $\lambda_{2.3} = 5 \pm \sqrt{5}$

zugehörige Eigenvektoren: $v^{(1)} = \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v^{(2)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$, $v^{(3)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$

b) o.n. Basis Σ_{neu}: $b_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$, $b_3 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$

und damit: $T = (b_1\ b_2\ b_3) = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{5} & \sqrt{5} \\ \sqrt{2} & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Lösung 2

a) Sei $b_1 = 1$, $b_2 = \cos(x)$, $b_3 = \sin(x)$, $b_4 = \cos(2x)$ und $b_5 = \sin(2x)$, d.h. $\dim(U) = 5$.

b) $\mathcal{D}(b_1) = 0$, $\mathcal{D}(b_2) = -b_3$, $\mathcal{D}(b_3) = b_2$, $\mathcal{D}(b_4) = -2b_5$ und $\mathcal{D}(b_5) = 2b_4$, also

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Kern(D) = span$\{e_1\}$ und Bild(D) wird aufgespannt von den Spalten zwei bis fünf von D, also Bild(D) = span$\{e_2, e_3, e_4, e_5\}$, wobei e_k, $k = 1, 2, \ldots, 5$ die Standardbasis im $\mathbb{R}^5$ ist.

Lösung 3

a) graphische Darstellung

b) $a_0 = A$ und $a_{2k-1}k = \frac{A}{\pi}(-1)^{k+1}\frac{2}{2k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$, $a_k = 0$ für k gerade.

c) $b_k = 0$, da eine ungerade Funktion über ein zum Nullpunkt symmetrisches Intervall integriert wird.

Lösung 4

a) EWP von A: $x_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v^{(1)} + c_2 e^{\lambda_2 t} v^{(2)} + c_3 e^{\lambda_3 t} v^{(3)}$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, da A symmetrisch.
$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ und $\lambda_3 = 0$ mit den zugehörigen Eigenvektoren
$v^{(1)} = \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v^{(2)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v^{(3)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Bestimmung der c_k mit der AB x_0: $c_1 = 0$, $c_2 = \frac{2}{3}$ und $c_3 = \frac{1}{3}$.

c) $x_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ so, dass $c_1 = c_2 = 0$:
$c_1 = \frac{1}{2}(-\alpha + \gamma)$, $c_2 = \frac{1}{6}(\alpha - 2\beta + \gamma)$ und $c_3 = \frac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma) \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma$

Lösung 5

$Q(x_1, x_2) = x^T A x - c^T x + 9 = 0$, wobei $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) $\det(A) = \frac{3}{4} > 0$, d.h. es handelt sich um eine Ellipse.

b) EWP von A: $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ und $\lambda_2 = \frac{3}{2}$ mit den EV: $v^{(1)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v^{(2)} = \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
o.n. Basis Σ_{neu} wird von $b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannt.
In Σ_{neu} lautet der Kegelschnitt: $\frac{1}{2} x_{1neu}^2 + \frac{3}{2} x_{2neu}^2 - c_{neu}^T x_{neu} + 9 = 0$,
wobei $c_{neu} = T^T c = 3\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
quadratische Ergänzung: $\frac{1}{2}\left(x_{1neu} - 3\sqrt{2}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(x_{2neu} + \sqrt{2}\right)^2 = 3$ und damit
$\frac{\left(x_{1neu} - 3\sqrt{2}\right)^2}{6} + \frac{\left(x_{2neu} + \sqrt{2}\right)^2}{2} = 1$, d.h. die Ellpise hat die Halbachsen $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{2}$ und den Mittelpunkt $M_{neu}(3\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Mittelpunkt im alten Koordinatensystem Σ_e: $M(4, 2)$

c) Graphische Darstellung: neues Koordinatensystem um $\varphi = \frac{\pi}{4}$ verdreht ($\longrightarrow$ Richtungen der Hauptachsen) und Translation um den Vektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ ($\longrightarrow$ Mittelpunkt).

Lösung 6

$x_{alt} = T x_{neu}$ für *jeden* Basiswechsel!

a)
$$T_{be} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \text{ da } x_e = T_{be} x_b$$

b)
$$T_{ce} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \text{ da } x_e = T_{ce} x_c$$

c) $T_{bc} : \Sigma_b \xrightarrow{T_{be}} \Sigma_e \xrightarrow{T_{ce}^{-1}} \Sigma_c$, also

$$T_{ce}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T_{bc} = T_{ce}^{-1} T_{be} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -4 & -13 \end{pmatrix} \qquad \text{Reihenfolge!}$$

d) $\vec{a}_e = T_{be} \vec{a}_b = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}_e$ und $\vec{a}_c = T_{bc} \vec{a}_b = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 \\ -17 \end{pmatrix}_c$ oder $\vec{a}_c = T_{ce}^{-1} \vec{a}_e$

Lösung 7

Gauss-Algorithmus

Schema nach einem Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	$4-\frac{c^2}{2}$	$-2c$	$1-2c$

Schema nach zwei Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	.	$8-2c-c^2$	$7-2c-\frac{3}{4}\,c^2$