Klasse WI06a **MLAN3 erster Test** 16. Oktober 2007

Name:

Aufgabe 1

Gegeben ist $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$

a) Bilden Sie $A = v \cdot v^T$. Wie gross ist der Rang von A?

b) $U = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \middle| \, Ax = 0 \right\}$.
Geben Sie eine Basis für U an, wie gross ist die Dimension von U?

Aufgabe 2

a) Gegeben ist das Skalarprodukt

$$(f, g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot g(x)\, dx. \tag{1}$$

Bestimmen Sie den Winkel zwischen $f_2(x) = \sin(2x)$ und $g_3(x) = \cos(3x)$ bzgl. (1).

b) Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{P}_5$ (= Polynome vom Grad ≤ 5).
Gegeben ist $U = \text{span}\left\{1 + x + x^5, x^2 + x^4, 1 - x^2 + x^3 - x^5, x - x^3 - x^4 + 2x^5\right\}$.
Bestimmen Sie eine Basis von U, $\dim(U) =$?

Aufgabe 3

a) Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^{3\times 3}$ der $3 \times 3-$ Matrizen.
Sei $U = \left\{ A \in V \middle| \, A^T = -A \right\}$. Bildet die Teilmenge U einen Unterraum in V?
Falls ja, wie gross ist die Dimension von U?

b) Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Die Spalten $a^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$, von A bilden eine Basis in $\mathbb{R}^3$.
Bestimmen Sie ausgehend von den $a^{(k)}$ mit dem Verfahren von Gram – Schmidt eine ortho – normierte Basis von $\mathbb{R}^3$.

WI06a MLAN3 Lösungen erster Test 18.10.07

Lösung 1

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \end{pmatrix}$, Rang$(A) = 1$

b) Schema nach einem Schritt:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1
1	2	3	4	5	0

4 freie Parameter: $x_{k+1} = \mu_k$, $k = 1, \dots, 4$, also span$(U) = \{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$

und damit dim$(U) = 4$.

Lösung 2

a) $\sin(2x) \cdot \cos(3x) = \frac{1}{2}\{\sin(-x) + \sin(5x)\} = \frac{1}{2}\{-\sin(x) + \sin(5x)\}$ und damit:

$$(f_2(x), g_3(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} \dots \, dx = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \cos(x) - \frac{1}{5}\cos(5x) \right\} \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

d.h. f_2 und g_3 sind orthogonal.

b) Endschema:

α_1	α_2	α_3	α_4	1
1	0	1	0	0
.	1	-1	0	0
.	.	1	-1	0
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

Eine Basis ist z.B. $p_1(x) = 1 + x + x^5$, $p_2(x) = x^2 + x^4$ und $p_3(x) = 1 - x^2 + x^3 - x^5$.

Lösung 3

a)
- Seien $A \in U$ und $B \in U$: $(A+B)^T = A^T + B^T = -A - B = -(A+B) \Rightarrow A + B \in U$
- sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $a \in U$: $(\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha(-A) = -\alpha A = -(\alpha A) \Rightarrow \alpha A \in U$

D.h. U ist ein UR in V, dim$(U) = 3$, da $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \in U$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

b) $b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung 4

a)

b)

c)

Mit dem Gauss-Algorithmus: Endschema:

x	y	z	1
2	3	1	0
.	2	4	0
.	.	3	0

d.h. der Rang $r = 3$, d.h. die drei Vektoren sind linear unabhängig.

Lösung 5

Gauss-Algorithmus

Schema nach einem Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	$4 - \frac{a^2}{2}$	$-2a$	$1 - 2a$

Schema nach zwei Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	.	$8 - 2a - a^2$	$7 - 2a - \frac{3}{4}\,a^2$

a)

b)

c)

d)

Lösung 6

a) $F \in g$, d.h. $F(-3+\mu, -3+7\mu, 1+3\mu)$ und damit $\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 5-\mu \\ 6-7\mu \\ 4-3\mu \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a} \cdot \overrightarrow{FA} = 0 \Longrightarrow \mu = 1$

und damit $F(-2, 4, 4)$. Also $g' :\ \vec{r} = \overrightarrow{0A} + \mu\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{0A'} = \overrightarrow{0A} + 2\overrightarrow{AF} \Longrightarrow A'(-6, 5, 3)$

Lösung 7

Gauss-Algorithmus, Endschema:

0	0	1	-1	-2	1
1	0	0	-1	-5	6
0	1	0	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{27}{5}$

Endschema:

x_1	x_2	x_3	x_4	1
1	0	1	-2	2
.	1	-2	3	-1
.	.	7	-6	5
.	.	.	.	2