Klasse WI06a **MLAN3 zweiter Test** 20. November 2007

Name:

Aufgabe 1

Eine Abbildung $\mathcal{F}$ ist wie folgt definiert:

$$\mathcal{F}(x_1, x_2, x_3) := (3x_1 - 2x_2 + 3x_3,\ 5x_1 - 8x_2 + x_3) \tag{1}$$

a) Ist $\mathcal{F}$ in (1) linear? (*mit* Begründung)

b) Bestimmen Sie den Definitions – sowie den Wertebereich von $\mathcal{F}$.

c) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix F von $\mathcal{F}$ bzgl. Σ_e.

d) Bestimmen Sie sowohl den Kern als auch das Bild von F.

Aufgabe 2

$\mathcal{D}\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ist eine Drehung im $\mathbb{R}^3$

um die Achse a durch den Nullpunkt mit dem Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und dem Drehwinkel $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

a) Wählen Sie eine neue *ortho–normierte* Basis Σ_{neu} so, dass die Drehung bzgl. Σ_{neu} möglichst einfach wird.

b) Geben Sie D_{neu} bzgl. Σ_{neu} an.

c) Geben Sie die Matrix T der Basistransformation $\mathcal{T}\colon \Sigma_{neu} \longrightarrow \Sigma_e$ an.

d) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix D der Drehung bzgl. Σ_e.

Aufgabe 3

a) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix T, die

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad b \neq 0$$

diagonalisiert.

b)
- Sei v ein Eigenvektor der $n \times n-$ Matrix A zum Eigenwert λ und $s \in \mathbb{R}$ ein Skalar.
  Zeigen Sie, dass v Eigenvektor von $A - sI_n$ zum Eigenwert $\lambda - s$ ist.
- Sei A eine $n \times n-$ Matrix.
  Zeigen Sie, dass A und A^T dieselben Eigenwerte haben.

WI06a MLAN3 Lösungen zweiter Test 20.11.07

Lösung 1

a) Seien $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, dann gilt:

$\mathcal{F}(a) = (3a_1 - 2a_2 + 3a_3, 5a_1 - 8a_2 + a_3)$ und $\mathcal{F}(b) = (3b_1 - 2b_2 + 3b_3, 5b_1 - 8b_2 + b_3)$.

- $\mathcal{F}(a+b) = (3(a_1+b_1) - 2(a_2+b_2) + 3(a_3+b_3), 5(a_1+b_1) - 8(a_2+b_2) + (a_3+b_3))$
  $= ((3a_1 - 2a_2 + 3a_3) + (3b_1 - 2b_2 + 3b_3), (5a_1 - 8a_2 + a_3) + (5b_1 - 8b_2 + b_3))$
  $= (3a_1 - 2a_2 + 3a_3, 5a_1 - 8a_2 + a_3) + (3b_1 - 2b_2 + 3b_3, 5b_1 - 8b_2 + b_3) = \mathcal{F}(a) + \mathcal{F}(b)$
- $\mathcal{F}(\alpha a) = (3\alpha a_1 - 2\alpha a_2 + 3\alpha a_3, 5\alpha a_1 - 8\alpha a_2 + \alpha a_3)$
  $= \alpha\,(3a_1 - 2a_2 + 3a_3, 5a_1 - 8a_2 + a_3) = \alpha\mathcal{F}(a)$

b) $\mathbb{D}(\mathcal{F}) = \mathbb{R}^3$ und $\mathbb{W}(\mathcal{F}) = \mathbb{R}^2$

c) $F = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 5 & -8 & 1 \end{pmatrix}$

d) Kern(F) = Lösungen von $Fx = 0$: Gauss–Algorithmus

Endschema:

x_1	x_2	x_3	1
3	-2	3	0
0	1	$\frac{6}{7}$	0

und damit: Kern(F) = span$\{\begin{pmatrix} -\frac{11}{7} \\ -\frac{6}{7} \\ 1 \end{pmatrix}\}$, dim(Kern$(F)$) $= n - r = 1$.

und Bild(F) = span$\{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \end{pmatrix}\}$, dim(Bild$(F)$) $= r = 2$.

Lösung 2

a) $b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ = Vielfaches des Richtungsvektors der Drehachse.

b_1 und b_2 orthogonal auf b_3 und $b_1 \perp b_2$: $b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Σ_{neu}: $b_1,\ b_2,\ b_3$

b) Eine Drehung um den Winkel φ hat bzgl. Σ_{neu} hat die Gestalt $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$: $D_{neu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist orthogonal, also $T^{-1} = T^T$.

d) $D = TD_{neu}T^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$

Lösung 3

a) EWP von A: $\lambda_{1.2} = a \pm |b| \Longrightarrow \lambda_{1.2} = a \pm b$, für b positiv oder negativ.

$E_{\lambda_1} = \text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ und $E_{\lambda_2} = \text{span}\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, also $T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

und damit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = T^T AT$

b)
- $Av = \lambda v \Longrightarrow (A - sI_n)v = Av - sI_n v = \lambda v - sv = (\lambda - s)v$
- $p_{A^T}(\lambda) = \det(A^T - \lambda I_n) = \det\{(A - \lambda I_n)^T\} = \det(A - \lambda I_n) = p_A(\lambda)$,
  d.h. A und A^T haben *dasselbe* charakteristische Polynom!

Lösung 4

a)

b) Schema nach einem Schritt:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1
1	2	3	4	5	0

Lösung 5

a)

b) Endschema:

α_1	α_2	α_3	α_4	1
1	0	1	0	0
.	1	-1	0	0
.	.	1	-1	0
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

Lösung 6

a)
-
-

b)

Lösung 7

a)

b)

c)

Mit dem Gauss-Algorithmus: Endschema:

x	y	z	1
2	3	1	0
.	2	4	0
.	.	3	0

d.h. der Rang $r = 3$, d.h. die drei Vektoren sind linear unabhängig.

Lösung 8

Gauss-Algorithmus

Schema nach einem Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	$4 - \frac{a^2}{2}$	$-2a$	$1 - 2a$

Schema nach zwei Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	.	$8 - 2a - a^2$	$7 - 2a - \frac{3}{4}\,a^2$

a)

b)

c)

d)

Lösung 9

a) $F \in g$, d.h. $F(-3+\mu, -3+7\mu, 1+3\mu)$ und damit $\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 5-\mu \\ 6-7\mu \\ 4-3\mu \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a} \cdot \overrightarrow{FA} = 0 \Longrightarrow \mu = 1$

und damit $F(-2, 4, 4)$. Also $g' :\ \vec{r} = \overrightarrow{0A} + \mu\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{0A'} = \overrightarrow{0A} + 2\overrightarrow{AF} \Longrightarrow A'(-6, 5, 3)$

Lösung 10

Gauss-Algorithmus, Endschema:

0	0	1	-1	-2	1
1	0	0	-1	-5	6
0	1	0	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{27}{5}$

Endschema:

x_1	x_2	x_3	x_4	1
1	0	1	-2	2
.	1	-2	3	-1
.	.	7	-6	5
.	.	.	.	2