Klasse WI07b **MLAN1 – Schlussprüfung** 17. Januar 2008

Name:

Bewertung: Alle Aufgaben haben dasselbe Gewicht.

Aufgabe 1

Gegeben sind die drei Vektoren

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Untersuchen Sie, ob diese drei Vektoren linear unabhängig sind (*mit* Begründung).

b) Konstruieren Sie mit den gegebenen Vektoren eine o.n. Basis mit Hilfe von Gram–Schmidt, falls Sie a) mit ja beantworten können.

Aufgabe 2

Gegeben sind eine Gerade $g:\ \vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$, sowie ein Punkt $A(2, 3, 5)$.

a) Gesucht ist eine Parameterdarstellung derjenigen Geraden g' durch A, die g senkrecht schneidet.

b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt $F = g \cap g'$.

c) Den Punkt A' erhält man, indem der Punkt A an g gespiegelt wird. Bestimmen Sie die Koordinaten von A'.

Aufgabe 3

a) Gegeben sind $\sum\limits_{j=-1}^{14} x_{j+2} = 12$ und $\sum\limits_{k=3}^{18} x_{k-2}^2 = 20$

Bestimmen Sie damit die Summe

$$s_a = \sum_{i=5}^{20} \left\{ 2x_{i-4} - \sum_{l=-3}^{12} (x_{l+4} - 2)^2 \right\}$$

b) Schreiben Sie die Summe

$$s_b = x - \frac{3}{2} \cdot x^2 + \frac{5}{4} \cdot x^3 - \frac{7}{8} \cdot x^4 + \frac{9}{16} \cdot x^5 \mp \ldots + \frac{21}{1024} \cdot x^{11}$$

mit dem Summenzeichen $s_b = \sum\limits_{k=1}^{\ldots} \ldots$

bitte wenden

Aufgabe 4

Gegeben sind die Matrizen

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Fassen Sie jede der obigen Matrizen als Tableau eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ auf, das für die eine rechte Seite b gelöst wurde, und beantworten Sie die folgenden Fragen:

a) Welches der Tableaus weist Zeilenstufenform `ref` oder gar reduzierte Zeilenstufenform `rref` auf? Geben Sie jeweils, falls nicht schon vorhanden, die `rref` an.

b) Wie gross ist der Rang der entsprechenden System-Matrix?

c) Geben Sie die entsprechenden Lösungen an.

Aufgabe 5

a) Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & a \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & a-5 & 1-a \end{pmatrix}$

Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ hat die Determinate von A den Wert Null?

b) Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ mit der Determinante $\det(A) = -6$.

Bestimmen Sie damit die Determinante von $B = \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{pmatrix}$.

Aufgabe 6

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} ax_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & = & a \\ x_1 & + & ax_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2ax_2 & - & a^2x_3 & = & a \end{array} \right.$$

Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ hat (1)

a) genau eine Lösung?

b) keine Lösung?

c) unendlich viele Lösungen?

d) Geben Sie für den Fall c) die Lösungen an.

Aufgabe 7

a) Gegeben ist die Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

i) Bestimmen Sie $B^2 - 3B + 2I_3$.

ii) Bestimmen Sie die Inverse von B mit Hilfe von i).

b) Gegeben ist $(5C^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. Gesucht ist die Matrix C.

Aufgabe 8 *mit Hilfe der Determinante?*

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ cx_1 & + & 4x_2 & + & cx_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & cx_2 & + & 6x_3 & = & 4 \end{array} \right.$$

a) Für welche Werte von $c \in \mathbb{R}$ hat die Lösungsmenge zwei freie Parameter?

b) Für welche Werte von $c \in \mathbb{R}$ hat die Lösungsmenge einen freien Parameter?

c) Wann gibt es genau eine Lösung?

d) Wann gibt es keine Lösung?

Geben Sie im Fall b) die Lösungen an; geometrische Interpretation.

Aufgabe 9

a) Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Ebene E_1, welche die Punkte $A(3, 2, -3)$ und $B(3, -2, 5)$ enthält und parallel zur Geraden $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist.

b) Berechnen Sie das Volumen des Tetraeders, das von den Ebenen E_1, π_2, π_3 und $E_2: z+3 = 0$ begrenzt wird.

MLAN1 Lösungen Schlussprüfung 17.01.08

Lösung 1

$x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 + z\vec{a}_3 \overset{!}{=} 0$

a) Mit dem Gauss-Algorithmus: Endschema:

x	y	z	1
2	3	1	0
.	2	4	0
.	.	3	0

d.h. der Rang $r = 3$, d.h. die drei Vektoren sind linear unabhängig.

b)

$$\vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung 2

a) $F \in g$, d.h. $F(-3+\mu, -3+7\mu, 1+3\mu)$ und damit $\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} -5+\mu \\ -6+7\mu \\ -4+3\mu \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a} \cdot \overrightarrow{FA} = 0 \Longrightarrow \mu = 1$

und damit Also $g' :\ \vec{r} = \overrightarrow{0A} + \mu\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$.

b) mit $\mu = 1$: $F(-2, 4, 4)$.

c) $\overrightarrow{0A'} = \overrightarrow{0A} + 2\overrightarrow{AF} \Longrightarrow A'(-6, 5, 3)$.

Lösung 3

a) Index – Shift:

$\sum\limits_{j=-1}^{14} x_{j+2} = \sum\limits_{j=1}^{16} x_j = 12$ und $\sum\limits_{k=3}^{18} x_{k-2}^2 = \sum\limits_{k=1}^{16} x_k^2 = 20$

$s_a = \sum\limits_{i=1}^{16} \left\{ 2x_i - \sum\limits_{l=1}^{16} (x_l - 2)^2 \right\}$

$\sum\limits_{l=1}^{16} (x_l - 2)^2 = \sum\limits_{l=1}^{16} x_l^2 - 4 \sum\limits_{l=1}^{16} x_l + 4 \cdot 16 = 36$

und damit $s_a = 2 \cdot 12 - 16 \cdot 36 = 24 - 24^2 = 24 \cdot (-23) = -552$

b) $s_b = \sum\limits_{k=1}^{11} (-1)^{k+1} \left(\frac{2k-1}{2^{k-1}}\right) \cdot x^k$

Lösung 4

a) U ist weder in `ref` noch in `rref`, da 4 oberhalb der führenden 1 in der $4-$ ten Spalte.
$3-$ te und $4-$ te Zeile müssen vertauscht werden.
`rref` von U:

x_1	x_2	x_3	x_4	1
1	3	0	0	2
.	.	1	0	0
.	.	.	1	0
.	.	.	.	6

V ist bereits in `rref`

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	1
1	0	0	4	0	0	1
.	1	0	0	0	0	0
.	.	1	0	0	0	0
.	.	.	.	.	1	0

b) Für U: System – Matrix hat Rang $r = 3$ und für V: System – Matrix hat Rang $r = 4$.

c) Lösungsmenge für U ist leer, da in der letzten Zeile ein Widerspruch $0 = 6$ steht.
Lösungsmenge für V: $n = 6$ und $r = 4$, d.h. zwei freie Parameter, $x_4 = \mu \in \mathbb{R}$ und $x_5 = \nu \in \mathbb{R}$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu, \nu \in \mathbb{R}.$$

Lösung 5

a) $\det(A) = (-1) \cdot (2a - a^2) \overset{!}{=} 0 \iff a_1 = 0$ oder $a_2 = 2$.

b) $B = PA$, wobei $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, zwei Zeilenvertauschungen.
$\det(B) = \det(P \cdot A) = \det(P) \cdot \det(A) = 1 \cdot \det(A) = \det(A) = -6$.

Lösung 6

Gauss-Algorithmus

Schema nach einem Schritt:

x_1	x_2	x_3	1
1	a	2	1
.	$4 - a^2$	$5 - 2a$	0
.	.	$(a^2 + 4)$	$2 - a$

a) kein vorzeitiger Abbruch: $a^2 - 4 \neq 0 \iff a \neq \pm 2$.

b) vorzeitiger Abbruch mit Widerspruch, d.h. $a = 2$ oder $a = -2$

$a = -2$:

x_1	x_2	x_3	1
1	-2	2	1
.	0	9	0
.	.	8	4

$\Longrightarrow$

x_1	x_2	x_3	1
1	-2	2	1
.	0	1	0
.	.	0	4

D.h. die letzte Zeile ist ein Widerspruch.

c) vorzeitiger Abbruch ohne Widerspruch, d.h. $a = 2$ oder $a = -2$

$a = 2$:

x_1	x_2	x_3	1
1	2	2	1
.	0	1	0
.	.	8	0

$\Longrightarrow$

x_1	x_2	x_3	1
1	2	2	1
.	0	1	0
.	.	0	0

D.h. $\infty-$ viele Lösungen mit einem freien Parameter: $x_2 = \mu \in \mathbb{R}$.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R}.$$

Lösung 7

a) i) $B^2 - 3B + 2I_3 = 0$

ii) $B^{-1} = \frac{1}{2}\,(3I_3 - B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

b) $(5\,C^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} =: B^{-1}$ und damit $5\,C^T = B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$,

also $C = \frac{1}{5}\,B^T = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Lösung 8

Gauss-Algorithmus

Schema nach einem Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	$4 - \frac{c^2}{2}$	$-2c$	$1 - 2c$

Schema nach zwei Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	.	$8 - 2c - c^2$	$7 - 2c - \frac{3}{4}\,c^2$

a) zwei freie Parameter sind *nicht* möglich, da zwei Pivots immer möglich sind, unabhängig von c ($r = 2$).

b) Abbruch nach zwei Schritten: $8 - 2c - c^2 = 0 \iff c = -4$ oder $c = 2$.
Damit es Lösungen gibt, muss die VB erfüllt sein: $7 - 2c - \frac{3}{4}\,c^2 = 0 \iff c = -\frac{14}{3}$ oder $c = 2$.
Also: ein freier Parameter genau dann, wenn $c = 2$: $x = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
geometrisch: drei Ebenen, die sich in einer Geraden schneiden.

c) genau eine Lösung: $c \neq -4$ und $c \neq 2$

d) keine Lösung: $c = -4$, VB nicht erfüllt.

Lösung 9

a) $g:\ \vec{r} = \overrightarrow{0P_0} + \mu\vec{a}$

$E_1:\ \vec{r} = \overrightarrow{0A} + \alpha\vec{a} + \beta\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und damit

$E_1:\ 4x + 6y + 3z = 15$

b) $V = \frac{h}{3}\,G$: Schnittpunkte der Ebene E_1 mit den Koordinatenachsen und $z = -3$ liefert die Punkte $(0,0,-3)$, $(0,0,5)$, $(6,0,-3)$, $(0,4,-3)$ und somit $h = 8$ und $G = 12$ woraus $V = 32$ resultiert.

Lösung 10

Gauss-Algorithmus, Endschema:

0	0	1	-1	-2	1
1	0	0	-1	-5	6
0	1	0	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{27}{5}$

a)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{27}{5} \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) erster Schritt: $Lc = Pb$, wobei $Pb = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 54 \end{pmatrix} \Longrightarrow c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 54 \end{pmatrix}$

zweiter Schritt: $Rc = x \Longrightarrow x = \begin{pmatrix} -14 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix}$