Klasse WI07b **MLAN1 - zweiter Test** 22. November 2007

Name:

Aufgabe 1

Gegeben ist die Parameterdarstellung einer Geraden $g\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$.

a) Gesucht ist eine Koordinatengleichung der Ebene E durch g, die orthogonal zum Seitenriss ist.

b) Weiter ist die Gerade h parallel zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ durch den Punkt $P(2,4,6)$ gegeben.

   Bestimmen Sie den Durchstosspunkt Q von h mit E.

   Was ist an der Lage von h speziell? Wie gross ist der Abstand von Q zum Seitenriss?

Aufgabe 2

Bei der Lösung eines Gleichungssystems $Ax = b$ behauptet der Student XY mit dem folgenden Tableau die `rref` bestimmt zu haben.

$$\begin{array}{rrrrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad (1)$$

a) Ist seine Behauptung richtig? (*mit* Begründung)

b) Falls Sie a) mit "Nein" beantworten: stellen Sie aus (1) die `rref` her.

c) Geben Sie die Anzahl der Gleichungen, die Anzahl der Unbekannten, sowie den Rang des Gleichungssystems $Ax = b$ an?

d) Geben Sie, falls es Lösungen gibt, die Lösungen an.

Aufgabe 3

Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & (a^2-14)x_3 & = & a+2 \end{array} \right. \qquad (2)$$

Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ hat (2)

a) keine Lösung?

b) genau eine Lösung?

c) $\infty-$ viele Lösungen? Geben Sie in diesem Fall die Lösungen an.

d) Was wird mit (2) bestimmt? Geometrische Interpretation der Fälle a) – c).

MLAN1 Lösungen zweiter Test 22.11.07

Lösung 1

a) $E\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$.

Elimination der Parameter liefert $E\colon 3x - 2z + 3 = 0$.

b) $h\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $Q = h \cap E \Longrightarrow Q(3, 6, 6)$.

h ist parallel zum Grundriss, letzte Komponente von $\vec{a}$ ist Null, Q hat den Abstand 6 vom Seitenriss.

Lösung 2

a) Nein, keine führende Eins in der zweiten Zeile und oberhalb des zweiten Pivots keine Null.

b)

$$(3) \qquad \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

c) Anzahl der Gleichungen: $m = 3$, Anzahl der Unbekannten: $n = 4$ und Rang $r = 2$.

d) $x_3 = \mu$ und $x_4 = \nu$, zwei freie Parameter, also

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mu, \nu \in \mathbb{R}.$$

Lösung 3

Endschema:

x_1	x_2	x_3	1
1	2	-3	4
.	-7	4	-10
.	.	$a^2 - 6$	$a - 4$

a) $a_{1.2} = \pm\sqrt{6}$

b) $a_{1.2} \neq \pm\sqrt{6}$

c) unmöglich! a kann *nicht* gleichzeitg $\pm\sqrt{6}$ und 4 sein!

d) Schnitt dreier Ebenen:

- a) keine gemeinsamen Punkte
- b) genau ein gemeinsamer Punkt: $S = E_1 \cap E_2 \cap E_3$
- c) So wie die Ebenen gegeben sind, ist es unmöglich, dass sie sich in einer gemeinsamen Geraden schneiden.