
Name:

Bewertung: Alle Aufgaben haben dasselbe Gewicht.

Aufgabe 1

Gegeben ist die Iteration

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{5}\,(x_k^2 - 5). \tag{1}$$

a) Bestimmen Sie die Fixpunkte von (1). Welcher Fixpunkt ist attraktiv, welcher abstossend? (*mit* Begründung).

b) Sei $x_0 = 2.1$. Gegen welchen der beiden Fixpunkte strebt (1)?

c) Bestimmen Sie $q \approx |F'(x_0)|$, wie gross ist q wirklich?

Aufgabe 2

Gegeben ist ein Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & 2 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie mit der *relativen Kolonnen Maximumstrategie* die $LR-$ Zerlegung von A, d.h. $LR = PA$.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Zerlegung aus a) die Lösung von $Ax = b$.

Aufgabe 3

$$H(a) = \sqrt{100a^2 - 1} \qquad a > \frac{1}{10} \tag{2}$$

Falls $a \longrightarrow \frac{1}{10}$, so entsteht bei der numerischen Bestimmung von (2) Auslöschung.

a) Bestimmen Sie für diesen Grenzfall die Kondition von (2), d.h. $\lim\limits_{a\to\frac{1}{10}} \kappa_H(a)$.

b) Können Sie die Auslöschung in (2) vermeiden? (*mit* Begründung)

c) Handelt es sich bei der folgenden Abbildung $n_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ um eine Norm?

$$n_1(x) = |x_1| + x_3^2, \text{ wobei } x \in \mathbb{R}^3$$

(*mit* Begründung).

bitte wenden

Aufgabe 4

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 10^{-5} & 10^{-5} \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ und der rechten Seite $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die exakte Lösung ist $x_e = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Kondition $\kappa(A)$ von A in der $\|\ldots\|_1$ – Norm.

b) Betrachten Sie nun für kleine positive ε die folgenden fehlerbehafteten rechten Seiten:

$$\text{b1) } \hat{b}_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{b2) } \hat{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+\varepsilon \end{pmatrix}$$

und berechnen Sie mit Hilfe von A^{-1} die entsprechenden Lösungen $\hat{x}_1$ und $\hat{x}_2$.

c) Bestimmen Sie für die beiden Lösungen aus b) die relativen Fehler $\|\delta\hat{x}_1\|_1$ und $\|\delta\hat{x}_2\|_1$.
Vergleichen Sie diese relativen Fehler mit der theoretisch hergeleiteten Abschätzung.
Interpretation?

Aufgabe 5

Betrachten Sie die Quadraturformel

$$Q = \sum_{k=0}^{2} w_k\, f(\xi_k) \qquad \text{mit} \quad \xi_k = 0,\ \frac{h}{2},\ h. \tag{3}$$

im Intervall $[0, h]$.

a) Bestimmen Sie die Gewichte w_k in (3) so, dass alle Polynome bis und mit Grad 2 exakt integriert werden.

b) Setzen Sie in (3) speziell $h = 1$, um

$$I = \int_a^b f(x)\,dx,$$

mit Hilfe von (3) numerisch zu integrieren. Dabei sind $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$ und $f(x) = \sin(x)$.
Welchen absoluten bzw. relativen Fehler machen Sie dabei?

Aufgabe 6

Gegeben ist die nicht-lineare Gleichung

$$2x = 2^x. \tag{4}$$

a) Bestimmen Sie die Lösungen von (4) durch Erraten.
Tipp: Skizzieren Sie sowohl die linke als auch die rechte Seite von (4) im selben Koordinatensystem.

b) Mit der Regula falsi soll nun (4) numerisch gelöst werden. Formen Sie (4) entsprechend um, und geben Sie für jede Nullstelle ein geeignetes Startintervall an.

c) Der Studentin C ist die Regula falsi zu langsam. Sie will (4) mit dem Verfahren von Newton lösen. Wie lautet die dazu nötige Rekursionsformel? Sie startet mit $x_0 = 3$. Ist die Konvergenzbedingung für diesen Startwert erfüllt? (*mit* Begründung)

MNM Lösungen Schlussprüfung 11.06.08

Lösung 1

$F(x) = x - \frac{1}{5}\,(x^2 - 5)$ mit $F'(x) = 1 - \frac{2}{5}\,x$

a) $s_1 = \sqrt{5}$ und $s_2 = -\sqrt{5}$: $F'(s_1) = 1 - \frac{2}{5}\,\sqrt{5} < 1$ und $F'(s_2) = 1 + \frac{2}{5}\,\sqrt{5} > 1$, also s_1 ist attraktiv und s_2 ist abstossend.

b) gegen s_1, da $x_0 > 0$, $x_1 > 0$, $\ldots$ und s_1 attraktiv!

c) $q \approx 1 - \frac{2}{5}\,2.1 = \frac{4}{25}$, $q = 1 - \frac{2}{5}\,\sqrt{5}$

Lösung 2

Gauss-Algorithmus, Endschema:

0	1	0	-4	5	2
0	0	1	1	2	2
1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{8}$	$\frac{9}{4}$

a)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) erster Schritt: $Lc = Pb$, wobei $Pb = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Longrightarrow c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \frac{9}{8} \end{pmatrix}$

zweiter Schritt: $Rx = c \Longrightarrow x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Lösung 3

a)

$$H'(a) = \frac{100a}{\sqrt{100a^2 - 1}} \qquad \Longrightarrow \kappa_H(a) = \left| \frac{100a^2}{100a^2 - 1} \right| = \frac{100a^2}{100a^2 - 1} \quad \text{da } a > \frac{1}{10}$$

$\Longrightarrow \lim_{a \to \frac{1}{10}} \kappa_H(a) = \infty$, da der Zähler gegen Eins und der Nenner gleichzeitig gegen Null geht! D.h. die Kondition des Problems (2) ist extrem schlecht.

b) Die Auslöschung kann *nicht* vermieden werden! (da die Kondition schlecht ist)

c) Nein, denn $n_1(x) = 0$ für alle Vektoren $x = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_2 \in \mathbb{R}$, d.h. bereits $(N1)$ ist verletzt.

Lösung 4

$A^{-1} = 10^5 \begin{pmatrix} 3 & -10^{-5} \\ -2 & 10^{-5} \end{pmatrix}$

a) Spaltenmaximum: $\|A\|_1 = 3 + 10^{-5}$ und $\|A^{-1}\|_1 = 5 \cdot 10^5$ und damit $\kappa(A) = 15 \cdot 10^5 + 5$

b) b1) $\hat{x}_1 = A^{-1}\hat{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 + 3\varepsilon 10^5 \\ 1 - 2\varepsilon 10^5 \end{pmatrix} = x_1 + \Delta x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon 10^5 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

b2) $\hat{x}_2 = A^{-1}\hat{b}_2 = (1+\varepsilon) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = x_2 + \Delta x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\|x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{2} |x_k|$, Summe der Beträge.

$\|\delta \hat{x}_1\|_1 = \frac{\|\Delta x_1\|}{\|x_1\|} = \frac{5}{2}\,\varepsilon\, 10^5$, und $\|\delta \hat{b}_1\|_1 = \frac{\|\Delta b_1\|}{\|b_1\|} = \varepsilon$, da $\hat{b}_1 = b_1 + \Delta b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}$

$\|\delta \hat{x}_2\|_1 = \frac{\|\Delta x_2\|}{\|x_2\|} = \varepsilon$, und $\|\delta \hat{b}_2\|_1 = \frac{\|\Delta b_2\|}{\|b_2\|} = \varepsilon$, da $\hat{b}_2 = b_2 + \Delta b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$

theoretische Schranke: $\|\delta \hat{x}_1\|_1 \leq \kappa(A) \cdot \|\delta \hat{b}_1\|_1$ ist realistisch, sie wird angenommen, da der relative Fehler von $\hat{x}_1$ von $O(10^5)$.

$\|\delta \hat{x}_2\|_1 \leq \kappa(A) \cdot \|\delta \hat{b}_2\|_1$ hingegen ist zu pessimistisch, der relative Fehler von $\hat{x}_2$ ist gleich gross wie derjenige von $\hat{b}_2$!

Lösung 5

a) zu lösendes Gleichungssystem:

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccc} w_0 & + & w_1 & + & w_2 & = & h \\ & & \frac{h}{2} w_1 & + & h w_2 & = & \frac{h^2}{2} \\ & & \frac{h^2}{4} w_1 & + & h^2 w_2 & = & \frac{h^3}{3} \end{array} \right.$$

Lösung von (5): $w_0 = w_2 = \frac{h}{6}$ und $w_1 = \frac{4h}{6}$, mit dem Gauss-Algorithmus (ein Schritt und Rückwärtseinsetzen).

b) $[0,1] \longrightarrow [0, \frac{\pi}{2}]$, wobei $x = x(\xi) = m\xi + q$. Hier $x = \frac{\pi}{2} \cdot \xi$, $0 \leq \xi \leq 1$.

$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\, dx \approx Q = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\sin(0) + 4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{12}\left(2\sqrt{2} + 1\right) \approx 1.0023.$

Fehler: absoluter Fehler $\Delta I = |Q - I| = \left|\frac{\pi}{12}\left(2\sqrt{2}+1\right) - 1\right| \approx 0.0023$ und

relativer Fehler $\delta I = \frac{\Delta I}{I} = \Delta I$, da $I = 1$. Relativer Fehler in Prozenten: 0.228%!!

Lösung 6

a) $s_1 = 1$ und $s_2 = 2$

b) $f(x) = 2^x - 2x$, also z.B.

- für s_1: $[a_1, b_1] = [0.5, 1.5]$, da $f(0.5) = \sqrt{2} - 1 > 0$ und $f(1.5) = 2\sqrt{2} - 3 < 0$
- für s_2: $[a_2, b_2] = [1.5, 2.5]$, da $f(1.5) = 2\sqrt{2} - 3 < 0$ und $f(2.5) = 4\sqrt{2} - 5 > 0$

c) Newton:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{2^{x_k} - 2x_k}{\ln 2 \cdot 2^{x_k} - 2} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$L = \left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2} \right| = \left| \frac{(2^x - 2x)(\ln 2)^2 \cdot 2^x}{(\ln 2 \cdot 2^x - 2)^2} \right| < 1$$

L ausgewertet für $x_0 = 3$: $L = \frac{16 \cdot (\ln 2)^2}{4(4\ln 2 - 1)^2} = \frac{4 \cdot (\ln 2)^2}{(4 \ln 2 - 1)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{1}{4 \ln 2})^2} < 1$