Klasse WI06a **MLAN4 Schlussprüfung** 16. Juni 2008

Name:

Aufgabe 1

Gegeben ist

$$g(t) = \cos(\omega t) + \sin(\omega t + \varphi). \tag{1}$$

a) Für welche Phase $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ hat die Summenfunktion $g(t)$ in (1) die Amplitude $A = \frac{4}{\sqrt{5}}$?

b) Wie gross ist die zu a) gehörige Phase ϑ von $g(t)$, falls gilt:

$$g(t) = \frac{4}{\sqrt{5}} \sin(\omega t + \vartheta).$$

Aufgabe 2

Es sei m eine reelle Zahl und $|\varepsilon| < 1$.

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$x = m - \varepsilon \cos(x) \tag{2}$$

im Intervall $\left[m - \frac{\pi}{2}, m + \frac{\pi}{2}\right]$ genau eine Lösung hat.
(Satz von Banach über das Iterationsverfahren $x = F(x)$).

b) Student B will die gegebene nicht-lineare Gleichung nicht mit (2), sondern mit der Regula falsi lösen. $f(x) =$? Wie muss er das Intervall $[a, b]$ wählen?

c) Studentin C ist das zu langsam. Sie will das Verfahren von Newton anwenden. Wie lautet die entsprechende Iterationsvorschrift?

Aufgabe 3

Gegeben sind zwei Harmonische Schwingungen:

$$y = f_1(x) = 4 \cdot \sin\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) \qquad \text{und} \qquad y = f_2(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right).$$

a) Überlagerung $y = f_1(x) + f_2(x) = f(x) = A \cdot \sin(2x + \varphi)$ mit Hilfe von Zeigern, graphische Darstellung.

b) Für welches kleinste positive x ist der Zeiger zum ersten mal parallel zur $y-$ Achse?

bitte wenden

Aufgabe 4

Gegeben ist die nicht-lineare Gleichung

$$2x = 2^x. \tag{3}$$

a) Bestimmen Sie die Lösungen von (3).

b) Um (3) numerisch zu lösen, soll die Iterationsformel

$$x_{n+1} = 2^{x_n - 1} \tag{4}$$

angewendet werden. $F(x) = ?$

c) Untersuchen Sie, ob und wohin die Iterationsfolge bei verschiedener Wahl von x_0 konvergiert.
Graphische Darstellung, (Einheiten: 4 Häuschen auf beiden Achsen).
Welcher der Fixpunkte ist attraktiv, welcher abstossend? (*mit* Begründung)

Aufgabe 5

Gegeben sind die Ebene $E: \; x + 2y + 2z = 9$ sowie die beiden Punkte $S(13, 8, -1)$ und $P(8, 7, -2)$.
S ist die Spitze einer geraden quadratischen Pyramide (S ist senkrecht über dem Schwerpunkt der Grundfläche). Alle vier Eckpunkte A, B, C und D der Grundfläche liegen in der Ebene E und der Punkt P liegt auf der Seitenkante AS.

a) Skizze

b) Bestimmen Sie die Koordinaten von A.

c) Wie gross ist der Neigungswinkel einer Seitenkante zur Grundfläche?

d) Berechnen Sie die Höhe h und das Volumen V der Pyramide.

Aufgabe 6

Gegeben ist die Iteration

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{5}\,(x_k^2 - 5). \tag{5}$$

a) Bestimmen Sie die Fixpunkte von (5). Welcher Fixpunkt ist attraktiv, welcher abstossend?
(*mit* Begründung).

b) Sei $x_0 = 2.1$. Gegen welchen der beiden Fixpunkte strebt (5)?

c) Bestimmen Sie $q \approx |F'(x_0)|$, wie gross ist q wirklich?

Viel Glück!

WI06a MLAN4 Lösungen zweite Klausur 16.06.08

Lösung 1

Koeffizientenvergleich:

a) $A^2 = \frac{16}{5} = 2(1 + \sin(\varphi)) \Longrightarrow \varphi = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$.

b) Pythagoras: $\cos(\varphi) = \frac{4}{5} \Longrightarrow \tan(\vartheta) = \frac{1+\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = 2$, also $\vartheta = \arctan(2)$.

Lösung 2

a) i) $F(I) \subset I$: $\cos\left(m \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin(m)$, d.h. diese Eigenschaft ist erfüllt.

ii) F stetig: F ist eine Zusammensetzung stetiger Funktionen, erfüllt.

iii) $L < 1$: $F'(x) = \varepsilon \cdot \sin(x)$, also $|F'(x)| = |\varepsilon| \cdot |\sin(x)| \leq \varepsilon < 1$ nach Voraussetzung, erfüllt.

b) $f(x) = x + \varepsilon \cdot \cos(x) - m = 0$ und z.B. $\left[m - \frac{\pi}{2}, m + \frac{\pi}{2}\right]$.

c) $f'(x) = 1 - \varepsilon \cdot \sin(x)$ und damit $x_{k+1} = x_k - \frac{x_k + \varepsilon \cdot \cos(x_k) - m}{1 - \varepsilon \cdot \sin(x_k)}$, $x_0 = m$ z.B.

Lösung 3

a) Graphik, $A = \sqrt{17}$ und $\varphi = \arctan\left(\frac{3}{5}\right) + \pi$, da der Zeiger für $x = 0$ in den dritten Quadranten zeigt!

b) $2x + \varphi = \frac{3\pi}{2} \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{3}{5}\right)$

Lösung 4

a) $s_1 = 1$ und $s_2 = 2$

b) $F(x) = \frac{1}{2}\, 2^x$

c) Graphik, $F'(x) = \frac{1}{2}\, \ln(2)\, 2^x$, also $F'(s_1) = \frac{1}{2}\, \ln(2) < 1$ und $F'(s_2) = 2\, \ln(2) > 1$, d.h. $s_1 = 1$ ist attraktiv und $s_2 = 2$ ist abstossend.

Startwert:

- $x_0 < 2$: Konvergenz gegen s_1.
- $x_0 > 2$: Divergenz $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \pm\infty$

Lösung 5

a) Graphik

b) $g = g(S, P)\colon \vec{r} = \overrightarrow{0S} + \mu\overrightarrow{SP} = \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A = g \cap E$, $\mu = 2$ und $A(3, 6, -3)$.

c) $\psi = \sphericalangle\left(\vec{n}, \overrightarrow{PS}\right)$ und Neigungswinkel $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$,

$\cos(\psi) = \sin(\varphi) = \frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{PS}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{PS}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und damit $\varphi = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

d) Höhenfusspunkt $F = l \cap E$, wobei $l\colon \vec{r} = \overrightarrow{0S} + \nu\vec{n}$, $\nu = -2$ und $F(11, 4, -5)$.

$|\overrightarrow{AF}| = 6\sqrt{2}$ und $|\overrightarrow{AB}| = 12 \Longrightarrow G = 144$ und $h = |\overrightarrow{FS}| = 6$, also $V = \frac{h}{3}\, G = 288$

Lösung 6

$F(x) = x - \frac{1}{5}\,(x^2 - 5)$ mit $F'(x) = 1 - \frac{2}{5}\, x$

a) $s_1 = \sqrt{5}$ und $s_2 = -\sqrt{5}$: $F'(s_1) = 1 - \frac{2}{5}\,\sqrt{5} < 1$ und $F'(s_2) = 1 + \frac{2}{5}\,\sqrt{5} > 1$, also s_1 ist attraktiv und s_2 ist abstossend.

b) gegen s_1, da $x_0 > 0$, $x_1 > 0$, ... und s_1 attraktiv!

c) $q \approx 1 - \frac{2}{5}\, 2.1 = \frac{4}{25}$, $q = 1 - \frac{2}{5}\,\sqrt{5}$

Aufgabe 7

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda-2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \lambda+1 \\ \lambda+7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Determinante von Ain Abhängigkeit von λ.

b) Für welche Werte von $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $det(A) = 0$?

Aufgabe 8

Aufgabe 9

Gegeben: Gerade $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, sowie die Punkte $A(0,3,9)$, $B(-2,5,6)$ und $C(-4,7,3)$.

Gesucht sind:

- Schwerpunkt S des Dreiecks ABC.
- Gerade $g_1 \parallel g$ durch S.
- Länge der zwischen π_1 und π_2 liegenden Strecke auf g_1.

a) Mit dem Gauss-Algorithmus: Endschema:

x	y	z	1
2	3	1	0
.	2	4	0
.	.	3	0

d.h. der Rang $r = 3$, d.h. die drei Vektoren sind linear unabhängig.

b)

$$\vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung 7

a) i)

ii)

b)

Lösung 8

Gauss-Algorithmus

Schema nach einem Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	$4-\frac{a^2}{2}$	$-2a$	$1-2a$

Schema nach zwei Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	.	$8-2a-a^2$	$7-2a-\frac{3}{4}\,a^2$

a)

b)

c)

d)

Lösung 9

a) $F \in g$, d.h. $F(-3+\mu,-3+7\mu,1+3\mu)$ und damit $\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 5-\mu \\ 6-7\mu \\ 4-3\mu \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a}\cdot\overrightarrow{FA} = 0 \Longrightarrow \mu = 1$

und damit $F(-2,4,4)$. Also $g'\,:\; \vec{r} = \overrightarrow{0A} + \mu\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{0A'} = \overrightarrow{0A} + 2\overrightarrow{AF} \Longrightarrow A'(-6,5,3)$

Lösung 10

Gauss-Algorithmus, Endschema:

0	0	1	-1	-2	1
1	0	0	-1	-5	6
0	1	0	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{27}{5}$

a)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{27}{5} \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) erster Schritt: $Lc = Pb$, wobei $Pb = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 27 \end{pmatrix} \Longrightarrow c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 27 \end{pmatrix}$

zweiter Schritt: $Rc = x \Longrightarrow x = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$

Lösung 11

a) $g:\ \vec{r} = \overrightarrow{0P_0} + \mu\vec{a}$

$$E_1:\ \vec{r} = \overrightarrow{0A} + \alpha\vec{a} + \beta\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ und damit

$E_1:\ 4x + 6y + 3z = 15$

b) $V = \frac{h}{3}G$: Schnittpunkte der Ebene E_1 mit den Koordinatenachsen und $z = -3$ liefert die Punkte $(0,0,-3)$, $(0,0,5)$, $(6,0,-3)$, $(0,4,-3)$ und somit $h = 8$ und $G = 12$ woraus $V = 32$ resultiert.

alte Lösungen

Lösung 12

a)

b) Endschema:

x_1	x_2	x_3	x_4	1
1	0	1	-2	2
.	1	-2	3	-1
.	.	7	-6	5
.	.	.	.	2

Das Glgsyst hat keine Lösung, da $r = 3$ und die letzte Zeile $0 = 2$ ein Widerspruch darstellt!

Lösung 13

Endschema:

b_{11}	b_{12}	b_{21}	b_{22}	1
2	-1	1	0	-3
.	5	0	1	12
.	.	-1	-1	-5
.	.	.	2	-6

also $b_{22} = -3$, $b_{21} = 8$, $b_{12} = 3$ und $b_{11} = -4$

$B = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$, das gegebene Problem hat genau eine Lösung.

Lösung 14

Endschema:

x	y	z	1
2	3	1	1
.	1	$(2t-1)$	-1
.	.	$(1-6t)(1-2t)$	$3(1-2t)$

a) $t \neq \frac{1}{2}$ und $t \neq \frac{1}{6}$, Rang $r = 3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{1-6t} \begin{pmatrix} -4-3t \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) $t = \frac{1}{6}$, letzte Zeile: $0 = 2$ ist ein Widerspruch!

c) $t = \frac{1}{2}$, Rang $r = 2$, $z = \mu =$ freier Parameter, $y = -1$ und $x = 2 - \frac{\mu}{2}$ und somit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R}$$

Lösung 15

a) $s_a = \sum\limits_{k=1}^{10} \left(k \cdot \sum\limits_{n=1}^{2k} n \right) = \sum\limits_{k=1}^{10} k \cdot \frac{2k(2k+1)}{2} = 2 \cdot \sum\limits_{k=1}^{10} k^3 + \sum\limits_{k=1}^{10} k^2 = 2 \cdot \left(\frac{10 \cdot 11}{2}\right)^2 + \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 6050 + 385 = 6435$

b) $s_b = \sum\limits_{n=1}^{N} \left((a-1) \cdot \sum\limits_{k=0}^{n-1} a^k \right) = \sum\limits_{n=1}^{N} (a^n - 1) = a \cdot \sum\limits_{n=0}^{N-1} a^{n-1} - N = a \cdot \frac{a^N - 1}{a-1} - N$

Lösung 16

$$\sum_{l=1}^{15} x_l = 20 \qquad \sum_{l=1}^{15} x_l^2 = 25 \quad \text{und damit} \qquad s = \sum_{k=1}^{15} (x_k - 80) = 20 - 15 \cdot 120 = -1780$$

Lösung 17

$$s_N = 2 \cdot \sum_{n=1}^{N} \left\{ \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} \right\} = 3 \cdot \sum_{n=1}^{N} n^2 + \sum_{n=1}^{N} n = N(N+1)^2$$

Lösung 18

$$\sum_{j=1}^{20} x_j = 4 \qquad \sum_{j=1}^{20} x_j^2 = \frac{3}{4} \qquad -3 \cdot \sum_{j=1}^{20} \left(x_j^2 - 2x_j + 1\right) = -3 \cdot \frac{3}{4} + 6 \cdot 4 - 3 \cdot 20 = -\frac{153}{4}$$

$$s = 2 \cdot \sum_{k=1}^{20} x_k - 20 \cdot \frac{153}{4} = 2 \cdot 4 - 5 \cdot 153 = -757$$