Klasse WI06a **MLAN4 – Schlussprüfung** 16. Juni 2008

Name:

Aufgabe 1

Gegeben ist die Differentialgleichung

(1) $$y'(x) = \sqrt{y(x)} \qquad \text{mit der Anfangsbedingung } y(0) = 0.$$

a) Bestimmen Sie die exakte Lösung von (1).

b) Lösen Sie (1) numerisch mit "Euler explizit". Wählen Sie $h = 0.1$ und führen Sie so viele Schritte durch, bis Sie bei $x = 1$ angelangt sind.

c) Können Sie sich das Verhalten von Euler in b) erklären?

Aufgabe 2

Gegeben ist die Differentialgleichung

(2) $$-y''(x) + 400y(x) = g(x) \qquad \text{mit den Anfangsbedingungen } y(0) = \alpha,\ y'(0) = \beta.$$

a) Schreiben Sie (2) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung. Bestimmen Sie die Jacobi–Matrix, sowie die Steifigkeit des Systems.

b) Wie muss die Schrittweite h gewählt werden, damit das System in a) mit "Euler explizit" numerisch stabil gelöst wird.

c) Das System in a) soll mit Heun der Fehlerordnung $p = 2$ numerisch $3-$ stellig korrekt gelöst werden. Wie gross darf die Schrittweite h am Anfang höchstens sein und wie lange muss diese Schrittweite verwendet werden?

Aufgabe 3

Gegeben ist die Differentialgleichung

(3) $$\dot{y}(t) = t \cdot y(t) \qquad \text{mit der Anfangsbedingung } y(0) = 1.$$

a) Lösen Sie (3) mit Hilfe einer Potenzreihe.

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ der Potenzreihe in a).

bitte wenden

Aufgabe 4

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & 1.2x - x^2 - \frac{xy}{x+0.2} \\ \dot{y}(t) & = & \frac{1.5xy}{x+0.2} - y \end{array} \right. \qquad \text{mit den Anfangsbedingungen} \left\{ \begin{array}{rcl} x(0) & = & 0.8 \\ y(0) & = & 1 \end{array} \right.$$

a) Bestimmen Sie die Jacobi–Matrix $J(x, y)$ von (4) und speziell $J(x(0), y(0))$.

b) Wie gross darf h am Anfang höchstens sein, damit (4) mit dem verbesserten Polygonzug numerisch stabil gelöst wird?

Aufgabe 5

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$(5) \qquad \dot{y}(t) = -y(t) + t + 1 \qquad \text{mit der Anfangsbedingung } y(0) = 1.$$

a) Bestimmen Sie die Lösung von (5).

b) Lösen Sie (5) mit der Methode der Taylorreihe.
Können Sie ein Bildungsgesetz für die Koeffizienten c_k angeben?

Aufgabe 6

a) Wie lauten die Bedingungen für die drei Parameter a, c_1 und c_2 des
$2-$ stufigen Runge–Kutta Verfahrens

$$\begin{array}{rcl} k_1 & = & f(x_k, y_k) \\ k_2 & = & f(x_k + ah, y_k + ahk_1) \\ y_{k+1} & = & y_k + h\{c_1k_1 + c_2k_2\} \end{array}$$

damit es maximale Fehlerordnung hat?

b) Erklären sie, dass die Fehlerordnung p höchstens 2 ist.

c) Als Spezialfälle sind sowohl die Methode von Heun, als auch die verbesserte Polygonzugmethode abzuleiten.

WI06a MLAN4 Lösungen Schlussprüfung 16.06.08

Lösung 1

(1) ist eine homogene separierbare Differentialgleichung:

a) $y_h(x) = \frac{x^2}{4} + c \Longrightarrow y(x) = \frac{x^2}{4}$

b) Euler explizit: $y_{k+1} = y_k + hf(x, y)$; hier ist $f(x, y) = \sqrt{y}$ und $y(0) = y_0 = 0$.
Also $y_1 = y_0 + h \cdot 0 = 0$ und $y_{k+1} = y_k + h \cdot 0 = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

c) Mit der AB $y_0 = 0$ werden alle $y_k = 0$, da f unabhängig von x.

Lösung 2

a) Substitution: $z_1 = y$ und $z_2 = y' \Longrightarrow z' = Az + b(x)$,
wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 400 & 0 \end{pmatrix} = J$ und $b(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g(x) \end{pmatrix}$
EW von A: $\lambda_{1.2} = \pm 20 \Longrightarrow S(t) = 1 =$ konstant.

b) Euler explizit: nur die negativen EW sind kritisch, also $-2 < h\lambda < 0 \Longrightarrow 0 < h < \frac{1}{10}$

c) Heun: auch hier sind nur die negativen λ kritisch: $R(h\lambda) = 1 + (h\lambda) + \frac{(h\lambda)^2}{2!}$
$\Longrightarrow \frac{(h\lambda)^3}{3!} < 5 \cdot 10^{-4}$ und somit $h < \frac{\sqrt[3]{3}}{2} \cdot 10^{-2}$.
Dieses h muss solange verwendet werden bis $e^{-20x} < 5 \cdot 10^{-4} \Longrightarrow x > -\frac{1}{20} \cdot \ln(5 \cdot 10^{-4})$

Lösung 3

Ansatz: $y(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k t^k \Longrightarrow \dot{y}(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1}$

a) in (3) einsetzen und Koeffizientenvergleich, AB: $a_0 = 1$.

$$a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + \ldots = t(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots)$$

$$\begin{array}{llllll}
t^0: & a_1 & = 0 & & & \\
t^1: & 2a_2 & = a_0 & \Rightarrow a_2 & = \dfrac{1}{2} a_0 & = \dfrac{1}{2^1 \cdot 1!} \\
t^2: & 3a_3 & = a_1 & \Rightarrow a_3 & = 0 & \\
t^3: & 4a_4 & = a_2 & \Rightarrow a_4 & = \dfrac{1}{2 \cdot 4} a_0 & = \dfrac{1}{2^2 \cdot 2!} \\
t^4: & 5a_5 & = a_3 & \Rightarrow a_5 & = 0 & \\
t^5: & 6a_6 & = a_4 & \Rightarrow a_6 & = \dfrac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} a_0 & = \dfrac{1}{2^3 \cdot 3!}
\end{array}$$

allgemein: $a_{2k+1} = 0$ und $a_{2k} = \frac{1}{2^k \cdot k!}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

b)

$$\rho = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_{2k}}{a_{2k+2}} \right| = \lim_{k \to \infty} \frac{2^{k+1} \cdot (k+1)!}{2^k \cdot k!} = \lim_{k \to \infty} 2 \cdot (k+1) = \infty$$

Lösung 4

a)

$$J(x,y)=\begin{pmatrix} 1.2-2x-\frac{0.2\cdot y}{(x+0.2)^2} & -\frac{x}{x+0.2} \\ \frac{0.3y}{(x+0.2)^2} & \frac{1.5x}{(x+0.2)}-1 \end{pmatrix} \qquad J(x(0),y(0))=\begin{pmatrix} -0.6 & -0.8 \\ 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$$

b) EW von $J(x(0),y(0))$: Det$(J(x(0),y(0))-\lambda I_2)=\lambda^2+0.4\lambda+0.12\stackrel{!}{=}0$ $\lambda_{1.2}=-\frac{1}{5}\pm j\frac{\sqrt{2}}{5}$.
Die EW sind konjugiert komplex, für die Stabilität ist der negative Realteil relevant (denn $e^{\lambda_{1.2}t}=e^{-\frac{1}{5}t}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{5}t\right)\pm j\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{5}t\right)\right]$ muss numerisch nachgebildet werden können), also $-2<h\cdot$ Re$(\lambda_{1.2})<0$ für Re$(\lambda_{1.2})=-\frac{1}{5}$, d.h. der verbesserte Polygonzug ist numerisch stabil, falls $0<h<10$.

Lösung 5

(5) ist inhomogen und separierbar, also $y_a(t)=y_h(t)+y_p(t)$

a) $y_h(t)=Ce^{-t}$, $C\in\mathbb{R}$. y_p mit Variation der Konstanten oder einem Ansatz aus dem Papula: $y_p(t)=c_1t+c_0$, da die Anregung linear in t. in (5) einsetzen und Koeffizientenvergleich liefert $c_1=1$ und $c_0=0$ und somit: $y_a(t)=Ce^{-t}+t$. Mit der AB: $C=1$ und schliesslich $y(t)=e^{-t}+t$

b) Methode der Taylorreihe im allgemeinen Näherungspunkt (t_k,y_k):

$$y(t)=y_k+c_1(t-t_k)+c_2(t-t_k)^2+c_3(t-t_k)^3+\ldots$$

$t=t_k+h$, also $h=(t-t_k)$ und damit

$$y(t_k+h) = y_k+c_1h+c_2h^2+c_3h^3+c_4h^4+\ldots \tag{6}$$
$$\dot{y}(t_k+h) = c_1+2c_2h+3c_3h^2+4c_4h^3+\ldots \tag{7}$$

einsetzen in (5) und Koeffizientenvergleich:

$$c_1+2c_2h+3c_3h^2+4c_4h^3+\ldots=-(y_k+c_1h+c_2h^2+c_3h^3+c_4h^4+\ldots)+(t_k+h)+1$$

$$\begin{array}{llllll}
h^0: & c_1 & =-y_k+t_k+1 & \text{Euler explizit} & & \\
h^1: & 2c_2 & =-c_1+1 & \Longrightarrow c_2 & =-\frac{1}{2}c_1+\frac{1}{2} & =\frac{1}{2!}y_k-\frac{1}{2!}t_k \\
h^2: & 3c_3 & =-c_2 & \Longrightarrow c_3 & =-\frac{1}{3}c_2 & =-\frac{1}{3!}y_k+\frac{1}{3!}t_k \\
h^3: & 4c_4 & =-c_3 & \Longrightarrow c_4 & =-\frac{1}{4}c_3 & =\frac{1}{4!}y_k-\frac{1}{4!}t_k \\
h^4: & 5c_5 & =-c_4 & \Longrightarrow c_5 & =-\frac{1}{5}c_4 & =-\frac{1}{5!}y_k+\frac{1}{5!}t_k \\
h^5: & 6c_6 & =-c_5 & \Longrightarrow c_6 & =-\frac{1}{6}c_5 & =\frac{1}{6!}y_k-\frac{1}{6!}t_k
\end{array}$$

und damit

$$y_{k+1} = y_k\left(1-h+\frac{h^2}{2!}-\frac{h^3}{3!}+\frac{h^4}{4!}-+\ldots\right)+t_k\left(h-\frac{h^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}-\frac{h^4}{4!}-+\ldots\right)+h \tag{8}$$
$$= e^{-h}y_k+t_k(-e^{-h}+1)+h \tag{9}$$

Lösung 6

In der Theorie wurde für ein $3-$ stufiges Verfahren

$$\begin{aligned} (10) \qquad d_{k+1} &= hf\left(1-c_1-c_2-c_3\right)+h^2F\left(\frac{1}{2}-a_2c_2-a_3c_3\right) \\ &\quad +h^3\left\{Ff_y\left(\frac{1}{6}-a_2c_3b_{32}\right)+G\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}a_2^2c_2-\frac{1}{2}a_3^2c_3\right)\right\}+O(h^4) \end{aligned}$$

hergeleitet.

a) Bei einem $2-$ stufigen Verfahren haben wir nur $a_2 \neq 0$, $a_3 = 0$, weiter ist $c_3 = 0$, also muss gelten:

$$\begin{aligned} (11) \qquad 1 &= c_1 + c_2 \\ (12) \qquad \frac{1}{2} &= a_2c_2 \end{aligned}$$

b) Mit diesen Bedingungen kann der Koeffizient von h^3 in (10) nicht auch noch gleichzeitig zu Null gemacht werden!

c) $a_2 = a$ und $b_{21} = a$

Heun: $a = 1 \Longrightarrow c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$, also $\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$

verbesserter Polygonzug: $a = \frac{1}{2} \Longrightarrow c_2 = 1$ und $c_1 = 0$ also $\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$