Klasse WI06a **MLAN4 erster Test** 31. März 2008

Name:

Dgl
Dgl–Systeme
Potenzreihen
Numerische Verfahren

Aufgabe 1

Gegeben ist die Differentialgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators

$$\ddot{x} + 0.4\,\dot{x} + 2.04x = 0 \tag{1}$$

mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 1$.

a) Schreiben Sie (1) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

b) *exakte* Lösung des Systems in a).

c) Approximieren Sie die Lösung aus b) mit der Methode von Euler, (Schrittweite $h > 0$).
Geben Sie die dafür benötigte Rekursion an. Führen Sie den ersten Schritt aus.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$(1+t)\,\dot{x} - \alpha\, x = 0 \qquad \text{mit} \quad x(0) = 1 \tag{2}$$

a) Lösen Sie (2) mit Hilfe einer Potenzreihe.

b) Die Lösung von (2) soll mit der Trapezmethode numerisch approximiert werden. Führen Sie dazu den ersten Schritt von $t_0 = 0$ nach $t_1 = h$ durch.

Aufgabe 3

Gegeben ist ein Differentialgleichungssystem $\dot{x} = Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $x_h(t)$ von (3).

b) Bestimmen Sie diejenige Lösung $x(t)$, für die die gegebene Anfangsbedingung erfüllt ist.

c) Wie muss die AB $x(0)$ gewählt werden, damit die Lösung $x(t)$ für $t \longrightarrow \infty$ beschränkt bleibt.

WI06a MLAN4 Lösungen erster Test 31.03.08

Lösung 1

a) Substitution: $y_1 = x$ und $y_2 = \dot{x}$ und damit erhalten wir $\dot{y} = Ay$, wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2.04 & -0.4 \end{pmatrix}$

b) EWP von A: $\lambda_{1.2} = -0.2 \pm j\omega_\delta$, wobei $\omega_\delta = \sqrt{2}$ mit den EV $v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$ und $v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ und somit

$y_h(t) = 2\,e^{-0.2\,t}\left(a\cos(\sqrt{2}t) - b\sin(\sqrt{2}t)\right)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -0.2 \end{pmatrix} - 2\,e^{-0.2\,t}\left(b\cos(\sqrt{2}t) + a\sin(\sqrt{2}t)\right)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

AB: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -0.2 \end{pmatrix} - 2b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a &= 0 \\ b &= -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$ und schliesslich

$y_h(t) = e^{-0.2\,t}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\sqrt{2}t)\right)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -0.2 \end{pmatrix} + e^{-0.2\,t}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\sqrt{2}t)\right)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

c) Euler: $y_{k+1} = y_k + h\,f(x_k,\, y_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, wobei hier $f(x, y) := Ay$, also

$$y_{k+1} = y_k + h\,A\,y_k \qquad \text{mit} \quad y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{somit: } y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + h\,A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ 1 - 0.4h \end{pmatrix}$$

Lösung 2

a) $x(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,t^k = a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2 + \ldots$

$\dot{x}(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k\,a_k\,t^{k-1} = a_1 + 2\,a_2\,t + 3\,a_3\,t^2 + \ldots$

einsetzen in die gegebene Dgl:

$$(1 + t)\,(a_1 + 2\,a_2\,t + 3\,a_3\,t^2 + \ldots) = \alpha\,(a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2 + \ldots)$$

AB: $x(0) = 1 \;\Rightarrow a_0 = 1$

Koeffizientenvergleich nach Potenzen in t:

$$t^0: \quad a_1 = \alpha\,a_0 \qquad a_1 = \frac{\alpha}{1} \tag{4}$$

$$t^1: \quad a_1 + 2a_2 = \alpha\,a_1 \qquad a_2 = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2\cdot 1} \tag{5}$$

$$t^2: \quad 2a_2 + 3a_3 = \alpha\,a_2 \qquad a_3 = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3\cdot 2\cdot 1} \tag{6}$$

$$t^3: \quad 3a_3 + 4a_4 = \alpha\,a_3 \qquad a_4 = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} \tag{7}$$

$$\ldots \tag{8}$$

allgemein:

$$a_k = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k\cdot(k-1)\ldots 1} \tag{9}$$

b) $\dot{x} = \alpha \frac{1}{1+t} x$

Integration über t: $\int\limits_0^h \dot{x}(t)dt = \alpha \int\limits_0^h \frac{1}{1+t} x(t)dt \Longrightarrow x(h) - x(0) = \alpha \int\limits_0^h \frac{1}{1+t} x(t)dt$

Approximation des Integrals durch die Trapezsumme: $x(h) \approx x(0) + \alpha \frac{h}{2}\{x(0) + \frac{1}{1+h} x(h)\}$

$\Longrightarrow x(h)\{1 - \alpha \frac{h}{2} \frac{1}{1+h}\} = (1 + \alpha \frac{h}{2}) x(0)$

$\Longrightarrow x(h) = \frac{(1+h)(2+\alpha h)}{2+2h-\alpha h} x(0)$

Lösung 3

a) EWP von A: $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_{2.3} = -1 \pm j\sqrt{3}$

zugehörige EV: $v^{(1)} = \mu_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$v^{(2)} = \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \mu_2 \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \} = \mu_2 \{u^{(2)} + j w^{(2)}\}$

also: $x_h(t) = c_1 e^{-t} v^{(1)} + 2e^{-t}\{[a_2 \cos(\sqrt{3}t) - b_2 \sin(\sqrt{3}t)] u^{(2)} - [a_2 \sin(\sqrt{3}t) + b_2 \cos(\sqrt{3}t)] w^{(2)}\}$

b) $c_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{2}$ und $b_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ und damit

$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-t}\{[\cos(\sqrt{3}t) + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}t)] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - [\sin(\sqrt{3}t) - \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\sqrt{3}t)] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}\}$$

c) $x(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ ist frei wählbar, da *alle* Realteile der Eigenwerte negativ sind!

Lösung 4

a)

b) Schema nach einem Schritt:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1
1	2	3	4	5	0

Lösung 5

a)

b) Endschema:

α_1	α_2	α_3	α_4	1
1	0	1	0	0
.	1	-1	0	0
.	.	1	-1	0
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

Lösung 6

a)
-
-

b)

Lösung 7

a)

b)

c)

Mit dem Gauss-Algorithmus: Endschema:

x	y	z	1
2	3	1	0
.	2	4	0
.	.	3	0

d.h. der Rang $r = 3$, d.h. die drei Vektoren sind linear unabhängig.

Lösung 8

Gauss-Algorithmus

Schema nach einem Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	$4 - \frac{a^2}{2}$	$-2a$	$1 - 2a$

Schema nach zwei Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	.	$8 - 2a - a^2$	$7 - 2a - \frac{3}{4}\,a^2$

a)

b)

c)

d)

Lösung 9

a) $F \in g$, d.h. $F(-3+\mu, -3+7\mu, 1+3\mu)$ und damit $\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 5-\mu \\ 6-7\mu \\ 4-3\mu \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a} \cdot \overrightarrow{FA} = 0 \Longrightarrow \mu = 1$

und damit $F(-2, 4, 4)$. Also $g' :\ \vec{r} = \overrightarrow{0A} + \mu\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{0A'} = \overrightarrow{0A} + 2\overrightarrow{AF} \Longrightarrow A'(-6, 5, 3)$

Lösung 10

Gauss-Algorithmus, Endschema:

0	0	1	-1	-2	1
1	0	0	-1	-5	6
0	1	0	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{27}{5}$

Endschema:

x_1	x_2	x_3	x_4	1
1	0	1	-2	2
.	1	-2	3	-1
.	.	7	-6	5
.	.	.	.	2