Klasse WI06a **MLAN4 zweiter Test** 09. Mai 2008

Name:

Differentialgleichungen
Numerische Verfahren
Fehlerordnung
Stabilität

Aufgabe 1

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$(1)\qquad y'(x) = x \cdot y^2(x) \qquad \text{mit der AB} \qquad y(0) = -8.$$

a) Bestimmen Sie die analytische Lösung von (1).

b) Führen Sie je mit dem verbesserten Polygonzug als auch mit dem Verfahren von Heun, $p = 2$ einen Schritt mit $h = 0.2$ durch.

c) Vergleichen Sie die beiden numerischen Werte. Feststellung?

Aufgabe 2

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$(2)\qquad \ddot{y} + 22\dot{y} + 40y = 0 \qquad \text{mit den AB} \qquad y(0) = \alpha \qquad \dot{y}(0) = \beta.$$

a) Schreiben Sie (2) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

b) Bestimmen Sie die Steifigkeit $S(t)$ des Systems in a).

c) Wie muss die Schrittweite h gewählt werden, damit das System in a) mit "Euler explizit" numerisch stabil gelöst wird?

Aufgabe 3

Student XY behauptet, ein neues Verfahren mit $p = 3$

$$(3)\qquad \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}$$

erfunden zu haben.
Würden Sie dieses Verfahren einsetzen?

a) Wenn ja, warum?

b) Wenn nein, warum nicht?

c) Im Fall b): Wie würden Sie (3) modifizieren?

d) Hat (3) die behauptete Fehlerordnung? (*mit* Begründung)

WI06a MLAN4 Lösungen zweiter Test 09.05.08

Lösung 1

a) (1) ist separierbar und homogen:

$$y_(x) = -\frac{1}{\frac{x^2}{2} + C} \qquad \text{mit der AB:} \quad C = \frac{1}{8} \quad \Longrightarrow \quad y(x) = -\frac{8}{4x^2 + 1}$$

b)

$$\text{verb Polygonzug} \quad \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array} \qquad \text{Heun} \quad \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

für beide Verfahren: $h = 0.2$ $x_0 = 0$ und $y_0 = -8$

- verbesserter Polygonzug:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_0, y_0) = 0 \\ k_2 &= f(x_0 + 0.1, y_0 + 0.1 \cdot k_1) = 0.1 \cdot y_0^2 = 6.4 \\ y_1 &= y_0 + 0.2 \cdot k_2 = -8 + 0.2 \cdot 6.4 = -6.72 \end{aligned}$$

- Heun:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_0, y_0) = 0 \\ k_2 &= f(x_0 + 0.2, y_0 + 0.2 \cdot k_1) = 0.2 \cdot y_0^2 = 12.8 \\ y_1 &= y_0 + 0.2 \cdot k_2 = -8 + 0.1 \cdot 12.8 = -6.72 \end{aligned}$$

c) Beide Werte sind gleich, da $k_1 = 0$ für beide Verfahren.

Lösung 2

a) $x_1 = y$ und $x_2 = \dot{y}$; und damit $\dot{x} = Ax$, wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -40 & -22 \end{pmatrix}$

b) Eigenwerte von A: $\det(A - \lambda I_2) = 0 = \lambda^2 + 22\lambda + 40 \Longrightarrow \lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = -20$.
Also $S(t) = 10$, konstant.

c) expliziter Euler stabil, falls $-2 < h\lambda < 0 \Longrightarrow 0 < h < \frac{1}{10}$

Lösung 3

a)

b) Nein, denn erstens $a_3 \neq b_{31} + b_{32}$ und zweitens $c_1 + c_2 + c_3 \neq 1$

c) Modifikation so, dass $a_3 = b_{31} + b_{32}$ und $c_1 + c_2 + c_3 = 1$

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \\ \hline & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{array} \quad \text{oder ...}$$

d) Nein, denn für den lokalen Fehler gilt:

$$\begin{aligned} d_{k+1} &= h\, f\, \{1 - c_1 - c_2 - c_3\} + h^2\, F\, \left\{\frac{1}{2} - a_2c_2 - a_3c_3\right\} \\ &\quad + h^3\, \left\{F\, f_y\, [\frac{1}{6} - a_2c_3b_{32}] + G\, [\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\, a_2^2c_2 - \frac{1}{2}\, a_3^2c_3]\right\} + O(h^4) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 1 \\ a_2c_2 + a_3c_3 &= \frac{1}{2} \\ a_2c_3b_{32} &= \frac{1}{6} \\ a_2^2c_2 + a_3^2c_3 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

müssen erfüllt werden!