Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie die Determinante von

$$S = \begin{pmatrix} \sin(2\varphi) & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \sin(2\varphi) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \sin(2\varphi) & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \sin(2\varphi) \end{pmatrix}$$

b) Für welche Werte von μ hat das folgende Gleichungssystem nicht–triviale Lösungen?

$$\begin{cases} (\mu-3)x_1 & & = & x_2 \\ x_1 & + \ (\mu-3)x_2 & = & 0 \end{cases}$$

Aufgabe 2

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem $Bx = c$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 10^{-5} & 10^{-5} \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und der exakten Lösung} \quad x_e = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Kondition $\kappa(B)$ von B in der $\|\ldots\|_\infty$ – Norm.

b) Gegeben sind nun für kleine positive ε die folgenden fehlerbehafteten rechten Seiten:

$$\text{b1) } \hat{c}_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{b2) } \hat{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie mit Hilfe von B^{-1} die entsprechenden Lösungen $\hat{x}_1$ und $\hat{x}_2$.

c) Bestimmen Sie für die beiden Lösungen aus b) die relativen Fehler $\|\delta\hat{x}_1\|_\infty$ und $\|\delta\hat{x}_2\|_\infty$.
Vergleichen Sie diese mit den Abschätzungen aufgrund der Kondition. Was stellen Sie fest?

Aufgabe 3

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem

$$Cx = d$$

mit

$$C = \begin{pmatrix} c & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad d = \begin{pmatrix} -1 \\ -c \\ -2 \end{pmatrix}.$$

a) Für welche c hat das Gleichungssystem genau eine Lösung? Geben Sie die Lösung an.

b) Für welche c hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen? Geben Sie die Anzahl freier Parameter und die Lösungsmenge an.

c) Für welche c hat das Gleichungssystem keine Lösung?

d) Geben Sie für die Fälle a) bis c) eine geometrische Interpretation an.

Aufgabe 4

a) Gegeben sind die beiden harmonsichen Schwingungen

$$\begin{aligned} f_1(t) &= 2\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right), \\ f_2(t) &= -4\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe eines Zeigerdiagramms die Amplitude A und die Phase φ der Überlagerung

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = A\sin(\omega t + \varphi).$$

(Graphische Darstellung des Zeigerdiagramms: Auf beiden Achsen 4 Häuschen pro Einheit.)

b) Bestimmen Sie alle Lösungen von $z^6 + 64j = 0$, und stellen Sie sie in der komplexen Ebene als Zeiger graphisch dar.

(Graphische Darstellung: Auf beiden Achsen 4 Häuschen pro Einheit.)

Aufgabe 5

Gegeben ist die Gleichung

$$x^2 + 3x = 4.$$

a) Bestimmen Sie algebraisch die Lösungen s_1 und s_2 der Gleichung.

b) Die Gleichung wird nun mit gewöhnlicher Iteration numerisch gelöst. Dabei soll die betragsmässig kleinere Lösung ein attraktiver Fixpunkt sein.

Geben Sie eine geeignete Iterationsgleichung an.

Berechnen Sie damit ausgehend vom Startwert $x_0 = 2$ die Folgewerte x_1 und x_2.

Bestimmen Sie $q \approx |F'(x_2)|$.

Wie gross ist der Konvergenzquotient q wirklich?

c) Die Gleichung soll nun mit der Methode von Newton numerisch gelöst werden.

Geben Sie die dazu nötige Rekursion an.

Überprüfen Sie, ob die Konvergenzbedingung für x_0 aus b) erfüllt ist.

Gegen welche der beiden Nullstellen konvergiert das Verfahren? (*mit* Begründung)

Aufgabe 6

Gegeben sind zwei windschiefe Geraden

$$g\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad h\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

sowie der Punkt $S(-9, 9, 0)$ im Grundriss. Gesucht ist eine Lichtrichtung so, dass sich die Schatten der Geraden g und h in der Grundrissebene im Punkt S schneiden.

Tipp: Überlegen Sie sich, was diese Aufgabe mit Transversalen zu tun hat.

MLAN1/2 Lösungen Assessment 19.08.08

Lösung 1 *Vektorgeometrie*

Die Lichtrichtung l ist eine Transversale von g und h durch den Punkt S.
Es sind verschiedene Lösungen möglich, z.B.:

a) $E_a = E_a(g, S)$, $P = h \cap E_a \Longrightarrow l\colon \vec{r} = \overrightarrow{0S} + \mu\overrightarrow{SP}$

$E_a\colon 14x + 12y - 17z = -18 \Longrightarrow P(1, 3, 4)$ und $l\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$.

b) $E_b = E_b(h, S)$, $Q = g \cap E_b \Longrightarrow l\colon \vec{r} = \overrightarrow{0S} + \mu\overrightarrow{SQ}$

$E_b\colon 4x + 14y + 11z = 90 \Longrightarrow Q(-4, 6, 2)$ und $l\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Lösung 2 *Diskussion von linearen Gleichungssystemen*

Gauss-Algorithmus

Tableau nach zwei Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
1	0	1	$-a$
.	1	$-a$	$-1 + a^2$
.	.	$a - 1$	$-(a-1)^2$

a) $a \neq 1$: $x_3 = -a + 1$, $x_2 = a - 1$ und $x_1 = -1$.

b) $a = 1$: vorzeitiger Abbruch nach zwei Schritten, d.h. ein freier Parameter.

Tableau für $a = 1$:

x_1	x_2	x_3	1
1	0	1	-1
.	1	-1	0
.	.	0	0

, d.h. $x_3 = \mu \in \mathbb{R}$, also

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R}.$$

c) unmöglich, cf. a) und b).

d)
- Fall a): drei Ebehen, die sich in einem Punkt schneiden.
- Fall b): drei Ebenen, die sich in einer Geraden schneiden.
- Fall c): So wie die Geraden gegeben sind, haben sie immer mindestens einen Punkt gemeinsam.

Lösung 3 *Harmonische Schwingungen und Zeiger, komplexe Zahlen*

a) $f_2(t) = -4\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) = 4\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3} + \pi\right) = 4\sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$

Diagramm: $\vec{a}_1(0) = \overrightarrow{0P_1}$, wobei $P_1\left(2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},\ 2 \cdot \frac{1}{2}\right)$ und $\vec{a}_2(0) = \overrightarrow{0P_2}$, wobei $P_2\left(4 \cdot (-\frac{1}{2}),\ 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Amplitude $A = |\vec{a}(0)| = |\vec{a}_1(0) + \vec{a}_2(0)| = 2\sqrt{5}$

Phase φ: $\tan(\varphi) = \frac{y_1+y_2}{x_1+x_2} = \frac{1+2\sqrt{3}}{-2+\sqrt{3}} < 0 \Longrightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{1+2\sqrt{3}}{-2+\sqrt{3}}\right) + \pi$

b) $z^6 = -64j = 64e^{j\frac{3\pi}{2}} \Longrightarrow z_k = r_k \cdot e^{j\varphi_k}$, $k = 0, 1, \ldots, 5$, wobei

$r_k = \sqrt[6]{64} = 2$ und $\varphi_k = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 5$.

z_0, z_1, …, z_5 sind die Ecken eines um $\frac{\pi}{4}$ verdrehten regulären $6-$ Ecks.

Lösung 4 *Iteration, Newtonverfahren*

a) $(x-1)(x+4)=0 \Longrightarrow s_1=1$ und $s_2=-4$.

b) $s_1=1$ soll attraktiver Fixpunkt sein. $x_{k+1}=F(x_k)$, wobei $F(x)=-\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{3}$ mit $F'(x)=-\frac{2}{3}x$, also $q\approx|F'(x_2)|=\frac{8}{9}<1$. Der wirkliche Wert für q ist: $q=|F'(s_1)|=\frac{2}{3}$.

c) Newton: $f(x)=x^2+3x-4$, $f'(x)=2x+3$ und $f''(x)=2$.

$x_0=2$ mit der Rekursion: $x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^2+3x_k-4}{2x_k+3}=\frac{x_k^2+4}{2x_k+3}$, $k=0,1,\ldots$

$L(x)=\left|\frac{(x^2+3x-4)\cdot 2}{(2x+3)^2}\right| \Longrightarrow L(x_0)=\frac{12}{49}<1$, d.h. die Konvergenzbedingung ist erfüllt.

$x_0=2$, einsetzen: $x_1=\frac{8}{7}$, einsetzen: $x_2=\frac{260}{259}$, ..., d.h. mit diesem x_0 konvergiert die Methode von Newton nach $s_1=1$.

Lösung 5 *Kondition von Gleichungssystemen*

$$A^{-1}=10^5\begin{pmatrix}3 & -10^{-5}\\ -2 & 10^{-5}\end{pmatrix}$$

a) Spaltenmaximum: $\|A\|_1=3+10^{-5}$ und $\|A^{-1}\|_1=5\cdot 10^5$ und damit $\kappa(A)=9\cdot 10^5+3$

b) b1) $\hat{x}_1=A^{-1}\hat{b}_1=\begin{pmatrix}-1+3\varepsilon 10^5\\ 1-2\varepsilon 10^5\end{pmatrix}=x_1+\Delta x_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}+\varepsilon 10^5\begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix}$

b2) $\hat{x}_2=A^{-1}\hat{b}_2=(1+\varepsilon)\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}=x_2+\Delta x_2=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}+\varepsilon\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$

c) $\|x\|_1=\sum\limits_{k=1}^{2}|x_k|$, Summe der Beträge.

$\|\delta\hat{x}_1\|_1=\frac{\|\Delta x_1\|}{\|x_1\|}=\frac{5}{2}\varepsilon\,10^5$, und $\|\delta\hat{b}_1\|_1=\frac{\|\Delta b_1\|}{\|b_1\|}=\varepsilon$, da $\hat{b}_1=b_1+\Delta b_1=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\varepsilon\\ 0\end{pmatrix}$

$\|\delta\hat{x}_2\|_1=\frac{\|\Delta x_2\|}{\|x_2\|}=\varepsilon$, und $\|\delta\hat{b}_2\|_1=\frac{\|\Delta b_2\|}{\|b_2\|}=\varepsilon$, da $\hat{b}_2=b_2+\Delta b_2=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \varepsilon\end{pmatrix}$

theoretische Schranke: $\|\delta\hat{x}_1\|_1\le\kappa(A)\cdot\|\delta\hat{b}_1\|_1$ ist realistisch, sie wird angenommen, da der relative Fehler von $\hat{x}_1$ von $O(10^5)$.

$\|\delta\hat{x}_2\|_1\le\kappa(A)\cdot\|\delta\hat{b}_2\|_1$ hingegen ist zu pessimistisch, der relative Fehler von $\hat{x}_2$ ist gleich gross wie derjenige von $\hat{b}_2$!

Lösung 6 *Determinanten*

a) Entwicklung nach der ersten Spalte:

$$\det(A)=\cos(2\varphi)\begin{vmatrix}\cos(2\varphi) & 1 & 0\\ 1 & \cos(2\varphi) & 1\\ 0 & 1 & \cos(2\varphi)\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & \cos(2\varphi) & 1\\ 0 & 1 & \cos(2\varphi)\end{vmatrix}$$

Die beiden 3− reihigen Determinanten werden ebenso nach der ersten Spalte entwickelt:

$$\begin{vmatrix}\cos(2\varphi) & 1 & 0\\ 1 & \cos(2\varphi) & 1\\ 0 & 1 & \cos(2\varphi)\end{vmatrix}=\cos(2\varphi)\begin{vmatrix}\cos(2\varphi) & 1\\ 1 & \cos(2\varphi)\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & \cos(2\varphi)\end{vmatrix}$$

und

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & \cos(2\varphi) & 1\\ 0 & 1 & \cos(2\varphi)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos(2\varphi) & 1\\ 1 & \cos(2\varphi)\end{vmatrix}$$

also

$\det(A)=(\cos^2(2\varphi)-1)^2-\cos^2(2\varphi)=\cos^4(2\varphi)-3\cos^2(2\varphi)+1$

b) Determinante der System-Matrix muss Null sein, d.h. $(\lambda-3)^2-1=\lambda^2-6\lambda+8=(\lambda-4)(\lambda+2)=0$ $\Longrightarrow \lambda_1=4$ und $\lambda_2=-2$.