Klasse WI07b **MLAN2 – Schlussprüfung** 09. Juni 2008

Name:

Bewertung: Alle Aufgaben haben dasselbe Gewicht.

Aufgabe 1

Gegeben sind zwei harmonische Schwingungen:

$$y = f_1(t) = 4 \cdot \sin\left(2t - \frac{3\pi}{4}\right) \qquad \text{und} \qquad y = f_2(t) = \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right).$$

a) Bestimmen Sie mit Hilfe von Zeigern die Überlagerung $y = f_1(t)+f_2(t) = f(t) = A \cdot \sin(2t + \varphi)$. Skizzieren Sie das Zeigerdiagramm für $t = 0$, (Einheiten für beide Achsen 2 Häuschen).

b) Für welches kleinste positive t liegt der Zeiger zum ersten mal auf der $y-$ Achse?

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$1 - \tan(x) = \cos(2x).$$

b) Vereinfachen Sie die Summe s soweit wie möglich:

$$s = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$$

Aufgabe 3

Gegeben ist ein Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & 2 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) Bestimmen Sie mit der *relativen Kolonnen Maximumstrategie* die $LR-$ Zerlegung von A, d.h. $LR = PA$.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Zerlegung aus a) die Lösung von $Ax = b$.

bitte wenden

Aufgabe 4

$$H(a) = \sqrt{100a^2 - 1} \qquad a > \frac{1}{10} \tag{1}$$

Falls $a \longrightarrow \frac{1}{10}$, so entsteht bei der numerischen Bestimmung von (1) Auslöschung.

a) Bestimmen Sie für diesen Grenzfall die Kondition von (1), d.h. $\lim\limits_{a \to \frac{1}{10}} \kappa_H(a)$.

b) Können Sie die Auslöschung in (1) vermeiden? (*mit* Begründung)

Aufgabe 5

Gegeben ist die nicht-lineare Gleichung

$$2x = 2^x. \tag{2}$$

a) Bestimmen Sie die Lösungen von (2) durch Erraten.

   Tipp: Skizzieren Sie sowohl die linke als auch die rechte Seite von (2) im selben Koordinatensystem.

b) Mit der Regula falsi soll nun (2) numerisch gelöst. Formen Sie (2) entsprechend um, und geben Sie für jede Nullstelle ein geeignetes Startintervall an.

c) Der Studentin C ist die Regula falsi zu langsam. Sie will (2) mit dem Verfahren von Newton lösen. Wie lautet die zugehörige Rekursionsformel? Sie startet mit $x_0 = 3$. Ist die Konvergenzbedingung für diesen Startwert erfüllt? (*mit* Begründung)

Aufgabe 6

a) Stellen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der folgenden Ungleichung in der Gauss'schen Zahlenebene graphisch dar:

$$|j + z + 1| \leq 3$$

b) Lösen Sie die Gleichung

$$\left(\frac{z+j}{z-j}\right)^2 = j^{25}. \tag{3}$$

   Tipp: Für die Umformungen von (3) z stehen lassen.

Aufgabe 7

a) Gegeben ist die Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

i) Bestimmen Sie $B^2 - 3B + 2I_3$.

ii) Bestimmen Sie die Inverse von B mit Hilfe von i).

b) Gegeben ist $(5C^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. Gesucht ist die Matrix C.

Aufgabe 8 *mit Hilfe der Determinante?*

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} \quad\;\; - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ cx_1 + 4x_2 + cx_3 = 1 \\ 2x_1 + cx_2 + 6x_3 = 4 \end{cases}$$

a) Für welche Werte von $c \in \mathbb{R}$ hat die Lösungsmenge zwei freie Parameter?

b) Für welche Werte von $c \in \mathbb{R}$ hat die Lösungsmenge einen freien Parameter?

c) Wann gibt es genau eine Lösung?

d) Wann gibt es keine Lösung?

Geben Sie im Fall b) die Lösungen an; geometrische Interpretation.

Aufgabe 9

a) Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Ebene E_1, welche die Punkte $A(3, 2, -3)$ und $B(3, -2, 5)$

enthält und parallel zur Geraden $g:\ \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist.

b) Berechnen Sie das Volumen des Tetraeders, das von den Ebenen E_1, π_2, π_3 und $E_2:\ z + 3 = 0$ begrenzt wird.

MLAN2 Lösungen Schlussprüfung 09.06.08

Lösung 1

a) Diagramm, $P_1\left(-4\frac{\sqrt{2}}{2},-4\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ und $P_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $A=\sqrt{17}$,

$\tan\varphi=\frac{(-3)}{(-5)} \Rightarrow \varphi=\arctan\left(\frac{3}{5}\right)+\pi$, dritter Quadrant!

b) $2t+\varphi=\frac{3\pi}{2} \Rightarrow t=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{3}{5}\right)$

Lösung 2

a) $z=x+jy \Rightarrow (x+1)^2+(y+1)^2\le 9$, Grenze: $(x+1)^2+(y+1)^2=9$, also

$\mathbb{B}$ = Innere, inkl. Rand, des Kreises mit Mittelpunkt $M(-1,-1)$ und Radius $r=3$.

b) $z^2(1-j)-2z(1-j)-(1-j)=0 \iff z^2-2z-1=0$ und somit $z_{1.2}=1\pm\sqrt{2}$.

Lösung 3

Gauss-Algorithmus, Endschema:

0	1	0	-4	5	2
0	0	1	1	2	2
1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{8}$	$\frac{9}{4}$

a)

$$L=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\-\frac{1}{4}&-\frac{3}{8}&1\end{pmatrix}\qquad R=\begin{pmatrix}-4&5&2\\0&2&2\\0&0&\frac{9}{4}\end{pmatrix}\qquad P=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

b) erster Schritt: $Lc=Pb$, wobei $Pb=\begin{pmatrix}2\\3\\\frac{1}{4}\end{pmatrix} \Longrightarrow c=\begin{pmatrix}2\\1\\\frac{9}{8}\end{pmatrix}$

zweiter Schritt: $Rc=x \Longrightarrow x=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Lösung 4

a)

$$H'(a)=\frac{100a}{\sqrt{100a^2-1}}\qquad \Longrightarrow \kappa_H(a)=\left|\frac{100a^2}{100a^2-1}\right|=\frac{100a^2}{100a^2-1}\qquad \text{da } a>\frac{1}{10}$$

$\Longrightarrow \lim\limits_{a\to\frac{1}{10}}\kappa_H(a)=\infty$, da der Zähler gegen Eins und der Nenner gleichzeitig gegen Null geht!

D.h. die Kondition des Problems (1) ist extrem schlecht.

b) Die Auslöschung kann *nicht* vermieden werden! (da die Kondition schlecht ist)

Lösung 5

a) graphische Darstellung, $s_1 = 1$ und $s_2 = 2$

b) $f(x) = 2^x - 2x$, also z.B.

- für s_1: $[a_1, b_1] = [0.5, 1.5]$, da $f(0.5) = \sqrt{2} - 1 > 0$ und $f(1.5) = 2\sqrt{2} - 3 < 0$
- für s_2: $[a_2, b_2] = [1.5, 2.5]$, da $f(1.5) = 2\sqrt{2} - 3 < 0$ und $f(2.5) = 4\sqrt{2} - 5 > 0$

c) Newton:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{2^{x_k} - 2x_k}{\ln 2 \cdot 2^{x_k} - 2} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$L = \left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2} \right| = \left| \frac{(2^x - 2x)(\ln 2)^2 \cdot 2^x}{(\ln 2 \cdot 2^x - 2)^2} \right| < 1$$

L ausgewertet für $x_0 = 3$: $L = \frac{16 \cdot (\ln 2)^2}{4(4 \ln 2 - 1)^2} = \frac{4 \cdot (\ln 2)^2}{(4 \ln 2 - 1)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{1}{4 \ln 2})^2} < 1$

Lösung 6

a)

$$\frac{\cos(x) - \sin(x)}{\cos(x)} = (\cos(x) - \sin(x)) \cdot (\cos(x) + \sin(x))$$

- $\cos(x) - \sin(x) = 0 : \tan(x) = 1 \Longrightarrow x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
- $\cos(x) - \sin(x) \neq 0 : \sin(x) \cdot (\cos(x) - \sin(x)) = 0 \Longrightarrow x_k = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

b)

- $$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin(\alpha) = \sqrt{2} \sin(\alpha)$$
- $$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(\alpha) = \sqrt{2} \cos(\alpha)$$

und schliesslich: $s = \sqrt{2}(\sin(\alpha) + \cos(\alpha))$

weitere Lösungen

Lösung 7

$F(x) = x - \frac{1}{5}\,(x^2 - 5)$ mit $F'(x) = 1 - \frac{2}{5}\,x$

a) $s_1 = \sqrt{5}$ und $s_2 = -\sqrt{5}$: $F'(s_1) = 1 - \frac{2}{5}\sqrt{5} < 1$ und $F'(s_2) = 1 + \frac{2}{5}\sqrt{5} > 1$, also s_1 ist attraktiv und s_2 ist abstossend.

b) gegen s_1, da $x_0 > 0$, $x_1 > 0$, $\ldots$ und s_1 attraktiv!

c) $q \approx 1 - \frac{2}{5}\,2.1 = \frac{4}{25}$, $q = 1 - \frac{2}{5}\sqrt{5}$

Gauss-Algorithmus

Schema nach einem Schritt:

x_1	x_2	x_3	1
1	a	2	1
.	$4 - a^2$	$5 - 2a$	0
.	.	$(a^2 + 4)$	$2 - a$

a) kein vorzeitiger Abbruch: $a^2 - 4 \neq 0 \iff a \neq \pm 2$.

b) vorzeitiger Abbruch mit Widerspruch, d.h. $a = 2$ oder $a = -2$

$a = -2$:

x_1	x_2	x_3	1
1	-2	2	1
.	0	9	0
.	.	8	4

$\Longrightarrow$

x_1	x_2	x_3	1
1	-2	2	1
.	0	1	0
.	.	0	4

D.h. die letzte Zeile ist ein Widerspruch.

c) vorzeitiger Abbruch ohne Widerspruch, d.h. $a = 2$ oder $a = -2$

$a = 2$:

x_1	x_2	x_3	1
1	2	2	1
.	0	1	0
.	.	8	0

$\Longrightarrow$

x_1	x_2	x_3	1
1	2	2	1
.	0	1	0
.	.	0	0

D.h. $\infty-$ viele Lösungen mit einem freien Parameter: $x_2 = \mu \in \mathbb{R}$.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mu \in \mathbb{R}.$$

Lösung 8

a) i) $B^2 - 3B + 2I_3 = 0$

ii) $B^{-1} = \frac{1}{2}(3I_3 - B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

b) $(5\,C^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} =: B^{-1}$ und damit $5\,C^T = B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$,

also $C = \frac{1}{5}\,B^T = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Lösung 9

Gauss-Algorithmus

Schema nach einem Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	$4 - \frac{c^2}{2}$	$-2c$	$1 - 2c$

Schema nach zwei Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	.	$8 - 2c - c^2$	$7 - 2c - \frac{3}{4}\,c^2$

a) zwei freie Parameter sind *nicht* möglich, da zwei Pivots immer möglich sind, unabhängig von c ($r = 2$).

b) Abbruch nach zwei Schritten: $8 - 2c - c^2 = 0 \iff c = -4$ oder $c = 2$.

Damit es Lösungen gibt, muss die VB erfüllt sein: $7 - 2c - \frac{3}{4}\,c^2 = 0 \iff c = -\frac{14}{3}$ oder $c = 2$.

Also: ein freier Parameter genau dann, wenn $c = 2$: $x = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

geometrisch: drei Ebenen, die sich in einer Geraden schneiden.

c) genau eine Lösung: $c \neq -4$ und $c \neq 2$

d) keine Lösung: $c = -4$, VB nicht erfüllt.

Lösung 10

a) $g:\ \vec{r} = \overrightarrow{0P_0} + \mu\vec{a}$

$E_1:\ \vec{r} = \overrightarrow{0A} + \alpha\vec{a} + \beta\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und damit

$E_1:\ 4x + 6y + 3z = 15$

b) $V = \frac{h}{3}\,G$: Schnittpunkte der Ebene E_1 mit den Koordinatenachsen und $z = -3$ liefert die Punkte $(0,0,-3)$, $(0,0,5)$, $(6,0,-3)$, $(0,4,-3)$ und somit $h = 8$ und $G = 12$ woraus $V = 32$ resultiert.

Lösung 11

Gauss-Algorithmus, Endschema:

0	0	1	-1	-2	1
1	0	0	-1	-5	6
0	1	0	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{27}{5}$

a)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{27}{5} \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) erster Schritt: $Lc = Pb$, wobei $Pb = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 54 \end{pmatrix} \Longrightarrow c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 54 \end{pmatrix}$

zweiter Schritt: $Rc = x \Longrightarrow x = \begin{pmatrix} -14 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix}$