Klasse WI07b **MLAN2 – Schlussprüfung** 09. Juni 2008

Name:

Bewertung: Alle Aufgaben haben dasselbe Gewicht.

Aufgabe 1

Gegeben sind zwei harmonische Schwingungen:

$$y = f_1(t) = 4 \cdot \sin\left(2t - \frac{3\pi}{4}\right) \qquad \text{und} \qquad y = f_2(t) = \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right).$$

a) Bestimmen Sie mit Hilfe von Zeigern die Überlagerung $y = f_1(t) + f_2(t) = f(t) = A \cdot \sin(2t + \varphi)$. Skizzieren Sie das Zeigerdiagramm für $t = 0$, (Einheiten für beide Achsen 2 Häuschen).

b) Für welches kleinste positive t liegt der Zeiger zum ersten mal auf der $y-$ Achse?

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$1 - \tan(x) = \cos(2x).$$

b) Vereinfachen Sie die Summe s soweit wie möglich:

$$s = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$$

Aufgabe 3

Gegeben ist ein Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & 2 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie mit der *relativen Kolonnen Maximumstrategie* die $LR-$ Zerlegung von A, d.h. $LR = PA$.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Zerlegung aus a) die Lösung von $Ax = b$.

bitte wenden

Aufgabe 4

$$(1) \qquad H(a) = \sqrt{100a^2 - 1} \qquad a > \frac{1}{10}$$

Falls $a \longrightarrow \frac{1}{10}$, so entsteht bei der numerischen Bestimmung von (1) Auslöschung.

a) Bestimmen Sie für diesen Grenzfall die Kondition von (1), d.h. $\lim\limits_{a \to \frac{1}{10}} \kappa_H(a)$.

b) Können Sie die Auslöschung in (1) vermeiden? (*mit* Begründung)

Aufgabe 5

Gegeben ist die nicht-lineare Gleichung

$$(2) \qquad 2x = 2^x.$$

a) Bestimmen Sie die Lösungen von (2) durch Erraten.

   Tipp: Skizzieren Sie sowohl die linke als auch die rechte Seite von (2) im selben Koordinatensystem.

b) Mit der Regula falsi soll nun (2) numerisch gelöst werden. Formen Sie (2) entsprechend um, und geben Sie für jede Nullstelle ein geeignetes Startintervall an.

c) Der Studentin C ist die Regula falsi zu langsam. Sie will (2) mit dem Verfahren von Newton lösen. Wie lautet die zugehörige Rekursionsformel? Sie startet mit $x_0 = 3$. Ist die Konvergenzbedingung für diesen Startwert erfüllt? (*mit* Begründung)

Aufgabe 6

a) Stellen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der folgenden Ungleichung in der Gauss'schen Zahlenebene graphisch dar:

$$|j + z + 1| \leq 3$$

b) Lösen Sie die Gleichung

$$(3) \qquad \left(\frac{z+j}{z-j}\right)^2 = j^{25}.$$

   Tipp: Für die Umformungen von (3) z stehen lassen.

MLAN2 Lösungen Schlussprüfung 09.06.08

Lösung 1

a) Diagramm, $P_1\left(-4\frac{\sqrt{2}}{2}, -4\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ und $P_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $A = \sqrt{17}$,

$\tan\varphi = \frac{(-3)}{(-5)} \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{3}{5}\right) + \pi$, dritter Quadrant!

b) $2t + \varphi = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{3}{5}\right)$

Lösung 2

a)

$$\frac{\cos(x) - \sin(x)}{\cos(x)} = (\cos(x) - \sin(x)) \cdot (\cos(x) + \sin(x))$$

- $\cos(x) - \sin(x) = 0 : \tan(x) = 1 \Longrightarrow x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$
- $\cos(x) - \sin(x) \neq 0 : \sin(x) \cdot (\cos(x) - \sin(x)) = 0 \Longrightarrow x_k = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

b)

- $$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(\alpha) = \sqrt{2}\sin(\alpha)$$
- $$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(\alpha) = \sqrt{2}\cos(\alpha)$$

und schliesslich: $s = \sqrt{2}(\sin(\alpha) + \cos(\alpha))$

Lösung 3

Gauss-Algorithmus, Endschema:

0	1	0	-4	5	2
0	0	1	1	2	2
1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{8}$	$\frac{9}{4}$

a)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) erster Schritt: $Lc = Pb$, wobei $Pb = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Longrightarrow c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \frac{9}{8} \end{pmatrix}$

zweiter Schritt: $Rc = x \Longrightarrow x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Lösung 4

a)

$$H'(a) = \frac{100a}{\sqrt{100a^2 - 1}} \qquad \Longrightarrow \kappa_H(a) = \left| \frac{100a^2}{100a^2 - 1} \right| = \frac{100a^2}{100a^2 - 1} \qquad \text{da } a > \frac{1}{10}$$

$\Longrightarrow \lim\limits_{a \to \frac{1}{10}} \kappa_H(a) = \infty$, da der Zähler gegen Eins und der Nenner gleichzeitig gegen Null geht!

D.h. die Kondition des Problems (1) ist extrem schlecht.

b) Die Auslöschung kann *nicht* vermieden werden! (da die Kondition schlecht ist)

Lösung 5

a) graphische Darstellung, $s_1 = 1$ und $s_2 = 2$

b) $f(x) = 2^x - 2x$, also z.B.

- für s_1: $[a_1, b_1] = [0.5, 1.5]$, da $f(0.5) = \sqrt{2} - 1 > 0$ und $f(1.5) = 2\sqrt{2} - 3 < 0$
- für s_2: $[a_2, b_2] = [1.5, 2.5]$, da $f(1.5) = 2\sqrt{2} - 3 < 0$ und $f(2.5) = 4\sqrt{2} - 5 > 0$

c) Newton:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{2^{x_k} - 2x_k}{\ln 2 \cdot 2^{x_k} - 2} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$L = \left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2} \right| = \left| \frac{(2^x - 2x)(\ln 2)^2 \cdot 2^x}{(\ln 2 \cdot 2^x - 2)^2} \right| < 1$$

L ausgewertet für $x_0 = 3$: $L = \frac{16 \cdot (\ln 2)^2}{4(4\ln 2 - 1)^2} = \frac{4 \cdot (\ln 2)^2}{(4\ln 2 - 1)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{1}{4\ln 2})^2} < 1$

Lösung 6

a) $z = x + jy \Rightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 9$, Grenze: $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 9$, also

$\mathbb{L} =$ Innere, inkl. Rand, des Kreises mit Mittelpunkt $M(-1, -1)$ und Radius $r = 3$.

b) $z^2(1-j) - 2z(1-j) - (1-j) = 0 \Longleftrightarrow z^2 - 2z - 1 = 0$ und somit $z_{1.2} = 1 \pm \sqrt{2}$.