Klasse WI07b **MLAN2 - zweiter Test** 05. Mai 2008

Name:

Aufgabe 1

Gegeben sind die beiden harmonischen Schwingungen

(1) $$y_1 = f_1(t) = +3\,\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right),$$

(2) $$y_2 = f_2(t) = +4\,\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right).$$

a) Bestimmen Sie mit Hilfe von Zeigern die Überlagerung $y = f_1(t) + f_2(t) = f(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$. Skizzieren Sie das Zeigerdiagramm für $t = 0$, (Einheiten für beide Achsen 2 Häuschen).

b) Für welches $t > 0$ liegt der Zeiger der Überlagerung zum ersten auf Mal der Geraden $y = x$.

Aufgabe 2

Die Gleichung $4x^3 - 3x + \frac{1}{2} = 0$ hat eine Lösung im Intervall $[0,\, 0.4]$.
Student A behauptet, mit der *Iterationsvorschrift*

i) $$x_{k+1} = \frac{1}{3}\left(4x_k^3 + \frac{1}{2}\right) \qquad x_0 = 0.2$$

könne diese Lösung bestimmt werden.
Student B behauptet, die *Iterationsvorschrift*

ii) $$x_{k+1} = \sqrt[3]{\frac{3}{4}x_k - \frac{1}{8}} \qquad x_0 = 0.2$$

sei besser.

a) Wer hat Recht? (*mit* Begründung, Satz von Banach über das Iterationsverfahren). Geben Sie für die Iteration, die garantiert funktioniert, $q \approx |F'(x_0)|$ an.

b) Wieviele Schritte müssten Sie für $7-$ stellige Genauigkeit durchführen, falls Sie das angegebene Intervall für eine *Bisektion* verwenden würden?

Aufgabe 3

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 10^{-4} \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{exakte Lösung: } x_e = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Kondition $\kappa(A)$ von A in der $\|.\|_\infty-$ Norm.

b) Betrachten Sie nun für $\varepsilon = 10^{-3}$ die fehlerbehafteten rechten Seiten:

- $\hat{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+\varepsilon \end{pmatrix}$
- $\hat{b}_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix}$

und berechnen Sie mit Hilfe von A^{-1} die entsprechenden Lösungen $\hat{x}_1$ und $\hat{x}_2$.

c) Bestimmen Sie für die beiden numerischen Lösungen in b) jeweils den relativen Fehler in der $\|.\|_\infty-$ Norm und vergleichen Sie diesen mit der auf der Kondition basierenden Abschätzung. Was stellen Sie fest?

MLAN2 **Lösungen zweiter Test** **05.05.08**

Lösung 1

a) $f_2(t) = 4\sin\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right)$, graphische Darstellung der Drehzeiger.
$P_1\left(3\frac{\sqrt{2}}{2}, 3\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $P_2\left(-4\frac{\sqrt{2}}{2}, 4\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\tan(\varphi) = -7 \Longrightarrow \varphi = -\arctan(7) + \pi$ und $A = 5$,
also $y = f(t) = 5 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$.

b) $\omega t + \varphi = \frac{5\pi}{4} \Longrightarrow t = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{4} + \arctan(7)\right)$

Lösung 2

Analyse der beiden Iterationen:

i) $x = F_a(x)$ mit $F_a(x) = \frac{1}{3}\left(4x^3 + \frac{1}{2}\right)$, $F_a'(x) = 4x^2$:
$F_a(I) \subset I$
F_a ist stetig auf $I = [0, 0.4]$,
die Ableitung ist maximal am rechten Rand von I: $F_a'(0.4) = 0.96 < 1$, d.h. alle drei Voraussetzungen sind erfüllt und $q \approx F_a'(0.2) = 0.16$.

ii) $x = F_b(x)$ mit $F_b(x) = \sqrt[3]{\frac{3}{4}x - \frac{1}{8}}$, $F_b'(x) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$:
$F_b(I) \not\subset I$, da $F_b(0) = -\frac{1}{2}$. (streng genommen ist F_b nur für $x \geq \frac{1}{6}$ definiert)
(Schon hier, kann die Konvergenz nicht garantiert werden, die anderen beiden Vor. müssten nicht mehr überprüft werden).
F_b ist stetig auf $I = [0, 0.4]$, F_b ist nicht definiert für $0 \leq x < \frac{1}{6}$.
die Ableitung ist für $x = \frac{1}{6}$ nicht definiert: $F_b'(\frac{1}{6}) = \infty$, Division durch Null!
alle drei Voraussetzungen sind verletzt, d.h. Konvergenz kann nicht garantiert werden.

a) A hat Recht. mit i) und ii)

b) $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-8}$, also $n > \frac{1}{\ln(2)} \cdot \ln(8 \cdot 10^6)$

Lösung 3

$$A^{-1} = (10^4)\begin{pmatrix} 2 & -10^{-4} \\ -1 & 10^{-4} \end{pmatrix}$$

a) Zeilenmaximum: $\|A\|_\infty = 3$ und $\|A^{-1}\|_\infty = 1 + 2 \cdot 10^4$ und damit $\kappa(A) = 3 \cdot (1 + 2 \cdot 10^4)$

b) b1) $\hat{x}_1 = A^{-1}\hat{b}_1 = (1+\varepsilon)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 + \Delta x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b2) $\hat{x}_2 = A^{-1}\hat{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 + 2\varepsilon 10^4 \\ 1 - \varepsilon 10^4 \end{pmatrix} = x_2 + \Delta x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon 10^4 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq k \leq 2} |x_k|$, absolut grösste Komponente.

$\|\delta\hat{x}_1\|_\infty = \frac{\|\Delta x_1\|}{\|x_1\|} = \varepsilon$, und $\|\delta\hat{b}_1\|_\infty = \frac{\|\Delta b_1\|}{\|b_1\|} = \varepsilon$, da $\hat{b}_1 = b_1 + \Delta b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$

$\|\delta\hat{x}_2\|_\infty = \frac{\|\Delta x_2\|}{\|x_2\|} = 2\,\varepsilon\,10^4$, und $\|\delta\hat{b}_2\|_\infty = \frac{\|\Delta b_2\|}{\|b_2\|} = \varepsilon$, da $\hat{b}_2 = b_2 + \Delta b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}$

theoretische Schranke: $\|\delta\hat{x}_1\|_\infty \leq \kappa(A) \cdot \|\delta\hat{b}_1\|_\infty$ ist zu pessimistisch, sie wird nicht angenommen.
$\|\delta\hat{x}_2\|_\infty \leq \kappa(A) \cdot \|\delta\hat{b}_2\|_\infty$ hingegen ist realistisch, da der relative Fehler von $\hat{x}_2$ von $O(10)$ mit $\varepsilon = 10^{-3}$.