Klasse WI07b **MLAN1/2 Assessment** 19. August 2008

Inhalte:
Matrizenrechnung, Bsp Chablis
Gauss-Algorithmus – Determinante:
Parameterabh Glgsyst, vollständige Diskussion
LR Zerlegung
Aufwand
rref ref
Kondition eines Problems eines Glgsyst $Ax = b$
Geometrie Vektoren, 3d in einem Würfel
Ebenen – Geraden schneiden
Abstände: orthogonale Transversale
Winkel – Skalarprodukt
Projektion - Gram-Schmidt
Trigo:
trigonometrische Gleichungen – Zeiger – Harmonische Schwingungen
Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$
Skalarprodukt – Vektorprodukt
nicht-lineare Gleichungen – numerische Integration

Aufgabe 1 *Vektorgeometrie*

Ein reguläres Tetraeder hat die Ecken A, B, C und D. Bekannt sind die Koordinaten der Eckpunkte $A(11, 2, 6)$ und $B(14, 14, 3)$ sowie des Punktes $Q(6, 12, 5)$, der auf der Kante BC liegt.

$$A(11, 2, 6) \qquad B(14, 14, 3) \qquad Q(6, 12, 5)$$

Bestimmen Sie die Koordinaten der oberhalb der Ebene $z = 0$ liegenden Ecke D.

Aufgabe 2 *Vektorgeometrie*

a) Von einem ebenen Viereck $ABCD$ sind die Ecken $A(6, 4, 6)$, $B(-2, 2, 2)$ und $C(4, -1, 2)$ gegeben. Bestimmen Sie die fehlende Koordinate x_D von $D(x_D, 1, 5)$.

b) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ z \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ y \\ -4 \end{pmatrix}$.

Gesucht sind y und z so, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein Quadrat aufspannen.

Aufgabe 3 *Vektorgeometrie*

Gegeben sind zwei windschiefe Geraden

$$g\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad h\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

sowie ein Punkt $S(-9, 9, 0)$ im Grundriss.
Gesucht ist eine Lichtrichtung so, dass sich die Schatten der Geraden g und h auf der Grundrissebene im Punkt S schneiden.

Aufgabe 4 *Determinanten*

a) Bestimmen Sie die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \cos(2\varphi) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \cos(2\varphi) & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cos(2\varphi) \end{pmatrix}$$

b) Für welche Werte von φ ist Determinante von A gleich Null?
Tipp: $\cos^2(\varphi) = \frac{1}{2}(\cos(2\varphi) + 1)$

Aufgabe 5 *Determinanten*

a) Bestimmen Sie folgende Determinante

$$\begin{vmatrix} 1+\cos(\alpha) & 1+\sin(\alpha) & 1 \\ 1-\sin(\alpha) & 1+\sin(\alpha) & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

b) Für welche Werte von λ hat das Gleichungssystem (1) nicht–triviale Lösungen?

$$(1) \qquad \begin{cases} (\lambda-3)x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ x_1 & + & (\lambda-3)x_2 & = & 0 \end{cases}$$

Aufgabe 6 *Trigonometrie*

a) Vereinfachen Sie

i) $\dfrac{2 \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ ii) $\dfrac{\sin(2x)\cdot(1-\cos(2x))}{\cos(4x)-\cos^2(2x)}$

b) Lösen Sie die folgende Gleichung:

i) $\sin(2\alpha)\cdot\left(2\sin^2(\alpha)-\cos(2\alpha)\right) = 0.$

ii) $\dfrac{1-\cos(x)-\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \qquad 0 \le x \le 2\pi$

iii) $\sin(2x)-\cos(x) = \dfrac{1}{\tan(x)} \qquad alle$

Aufgabe 7

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 10^{-5} & 10^{-5} \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ und der rechten Seite $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die exakte Lösung ist $x_e = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Kondition $\kappa(A)$ von A in der $\|\ldots\|_1$ – Norm.

b) Betrachten Sie nun für kleine positive ε die folgenden rechten Seiten:

$$\text{b1) } \hat{b}_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{b2) } \hat{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+\varepsilon \end{pmatrix}$$

und berechnen Sie die entsprechenden Lösungen $\hat{x}_1$ und $\hat{x}_2$.

c) Bestimmen Sie für die beiden Lösungen aus b) die relativen Fehler $\|\delta\hat{x}_1\|_1$ und $\|\delta\hat{x}_2\|_1$.
Vergleichen Sie diese relativen Fehler mit der theoretisch hergeleiteten Abschätzung. Interpretation?

Aufgabe 8 *Aitken, Steffensen*

Gegeben ist die Gleichung

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \tag{2}$$

a) Bestimmen Sie die Lösungen von (2).

b) (2) wird nun mit der gewöhnlichen Iteration numerisch gelöst. Dabei soll die betragsmässig kleinere Nullstelle s_1 von (2) ein attraktiver Fixpunkt der Iteration sein. Startwert $x_0 = 2$.
Bestimmen Sie $q \approx |F'(x_0)|$, wie gross ist q wirklich?

c) Berechnen Sie ausgehend von $x_0 = 2$ die Werte x_1, x_2 und x_3 sowie die Werte x'_0 und x'_1 nach dem *Aitken'schen* Δ^2- Verfahren.
Bestimmen Sie damit den Näherungswert

$$q_{\text{Aitken}} \approx \left| \frac{x'_1 - s_1}{x'_0 - s_1} \right|$$

Aufgabe 9 *komplexe Zahlen* $\mathbb{C}$

Gesucht sind Real-und Imaginärteil von:

$$\text{a)} \quad z_a = \frac{1-j}{1+2j} - \frac{1+3j}{1-2j} \qquad \text{b)} \quad z_b = \frac{(1+j)(1-2j)(3+7j)}{(4-5j)(1+3j)^2}$$

Aufgabe 10 *komplexe Zahlen* $\mathbb{C}$

Wie lauten die Lösungen folgender Gleichungen:

$$\text{a) } (1-j)\,z^2 + (1+j)\,z - 2 + j = 0 \qquad \text{b) } (1+j)\,z^3 + (-2+4j)\,z^2 - (7+9j)\,z = 0$$

Aufgabe 11 *komplexe Zahlen* $\mathbb{C}$

Gegeben ist $z_0 = -3 - j$.
Gesucht sind alle Punkte in der komplexen Ebene, die gleichzeitig

$$|z - z_0| = 5 \tag{3}$$

$$Re(z) + Im(z) = 1 \tag{4}$$

erfüllen. Stellen Sie zudem (3) und (4) in der Gauss'schen Ebene graphisch dar.

Aufgabe 12 *Rang, Matrizenrechnung*

a) Berechnen Sie für beliebige Skalare a, b und $c \in \mathbb{R}$ die reellen Nullstellen der Funktion

$$d(\gamma) = \text{Det}\begin{pmatrix} 1-\gamma & a & b \\ 2 & 3-\gamma & c \\ 0 & 0 & 5-\gamma \end{pmatrix}$$

b) Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 4 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Gesucht sind x und y so, dass die Matrixgleichung

$$(A+B)^2 = A^2 + B^2$$

erfüllt ist.

Aufgabe 13 *harmonische Schwingungen Zeiger*

a) Gegeben sind die beiden harmonsichen Schwingungen

$$y_1 = f_1(t) = 2\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \tag{5}$$

$$y_2 = f_2(t) = -4\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) \tag{6}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Zeigerdiagramms für $t = 0$ die Amplitude A und die Phase φ der Überlagerung $y = y_1 + y_2 = f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$.

(graphische Darstellung: Einheiten auf beiden Achsen 4 Häuschen)

b)

c) Stellen Sie die Lösungen von $z^6 + 64j = 0$ in der komplexen Ebene als Zeiger graphisch dar.

(graphische Darstellung: Einheiten auf beiden Achsen 4 Häuschen)

Aufgabe 14 *Diskussion der Lösungen*

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem

$$Cx = b \tag{7}$$

mit

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & c^2 - 14 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ c+2 \end{pmatrix}.$$

a) Wann hat (7) genau eine Lösung?

b) Wann hat (7) $\infty-$ viele Lösungen, mit wievielen freien Parametern?

c) Wann hat (7) keine Lösung?

Geben Sie in den Fällen a) und b) die Lösungen an.

d) Geometrische Interpretation von a) - c).

Aufgabe 15 *Diskussion der Lösungen*

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem

$$Ax = b \tag{8}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -a \\ -2 \end{pmatrix}.$$

a) Wann hat (8) genau eine Lösung?

b) Wann hat (8) $\infty-$ viele Lösungen, mit wievielen freien Parametern?

c) Wann hat (8) keine Lösung?

Geben Sie in den Fällen a) und b) die Lösungen an.

d) Geometrische Interpretation von a) - c).

weitere Aufgaben

Aufgabe 16

-
-
-

Aufgabe 17

a) Gegeben ist die Matrix

$$W = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Fassen Sie die obige Matrix als Tableau eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ auf, das für die eine rechte Seite b gelöst wurde, und beantworten Sie die folgenden Fragen:

- Ist das gegebene Tableaux in Zeilenstufenform `ref` oder gar in reduzierter Zeilenstufenform `rref`? Geben Sie die jeweilige Form an.
- Wie gross ist der Rang der entsprechenden System-Matrix?
- Geben Sie die Lösungsmenge an.

b) Gegeben seien die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad d = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ d_3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie d_3 so, dass diese Vektoren linear abhängig werden.

Aufgabe 18

Im Würfel $ABCDEFGH$ ist J der Mittelpunkt von HE. J wird mit einem Punkt K der Körperdiagonalen AG verbunden, wobei $\overline{AK} = \frac{1}{6}\,\overline{AG}$. Die Gerade $g = g(J, K)$ schneidet die Ebene $ABCD$ in L.
Schreiben Sie $\overrightarrow{AL}$ als Linearkombination von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$
Lös: $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{5}\,\overrightarrow{AB} + \frac{1}{10}\,\overrightarrow{AD}$

Aufgabe 19

Gegeben sind die Matrizen

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ein weiteres Beispiel

$$W = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Fassen Sie jede der obigen Matrizen als Tableau eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ auf, das für die eine rechte Seite b gelöst wurde, und beantworten Sie die folgenden Fragen:

- Welches der Tableaus weist Zeilenstufenform `ref` oder gar reduzierte Zeilenstufenform `rref` auf? Geben Sie die jeweiligen Formen an.
- Wie gross ist der Rang der entsprechenden System-Matrix?
- Welche der Lösungsmengen sind leer?

b) Fassen Sie nun jede der obigen Matrizen als Tableau zweier linearer Gleichungssysteme $Ax = b_k$ mit zwei rechten Seiten b_1 und b_2 auf. Diese beiden Gleichungssysteme wurden simultan gelöst. Beantworten Sie die gleichen Fragen wie unter a).

Aufgabe 20

Gegeben seien die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad d = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ d_3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie d_3 so, dass diese Vektoren linear abhängig werden.

Aufgabe 21 *LR - Zerlegung, Diagonal-Strategie*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die $LR-$Zerlegung von A mit dem Gauss-Algorithmus, **ohne** Permutationen. (entstehende Brüche vollständig gekürzt)

b) Lösen Sie mit Hilfe dieser Zerlegung das lineare Gleichungssystem $Ax = b$.

Aufgabe 22

Seien $L =$ eine untere $n \times n-$ Dreiecksmatrix, d.h. $l_{ij} = 0$, falls $i < j$ und
$R =$ eine obere $n \times n-$ Dreiecksmatrix, d.h. $r_{ij} = 0$, falls $i > j$.

a) Was ensteht bei der Multiplikation $L \cdot R$, wieviele Elemente sind von Null verschieden?

b) Bestimmen Sie den Rechenaufwand ($=$ Anzahl Multiplikationen) bei der Multiplikation in a)

MLAN1/2 Lösungen Assessment 21.08.07

Lösung 1

$g\colon \vec{r} = \overrightarrow{0P} + \mu\overrightarrow{PQ} =,$

a)

b)

Lösung 2

a) i)

ii)

b)

Lösung 3

$A^{-1} = 10^5 \begin{pmatrix} 3 & -10^{-5} \\ -2 & 10^{-5} \end{pmatrix}$

a) Spaltenmaximum: $\|A\|_1 = 3 + 10^{-5}$ und $\|A^{-1}\|_1 = 5 \cdot 10^5$ und damit $\kappa(A) = 9 \cdot 10^5 + 3$

b) b1) $\hat{x}_1 = A^{-1}\hat{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 + 3\varepsilon 10^5 \\ 1 - 2\varepsilon 10^5 \end{pmatrix} = x_1 + \Delta x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon 10^5 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

b2) $\hat{x}_2 = A^{-1}\hat{b}_2 = (1+\varepsilon)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = x_2 + \Delta x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{2} |x_k|$, Summe der Beträge.

$\|\delta\hat{x}_1\|_1 = \frac{\|\Delta x_1\|}{\|x_1\|} = \frac{5}{2}\,\varepsilon\,10^5$, und $\|\delta\hat{b}_1\|_1 = \frac{\|\Delta b_1\|}{\|b_1\|} = \varepsilon$, da $\hat{b}_1 = b_1 + \Delta b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}$

$\|\delta\hat{x}_2\|_1 = \frac{\|\Delta x_2\|}{\|x_2\|} = \varepsilon$, und $\|\delta\hat{b}_2\|_1 = \frac{\|\Delta b_2\|}{\|b_2\|} = \varepsilon$, da $\hat{b}_2 = b_2 + \Delta b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$

theoretische Schranke: $\|\delta\hat{x}_1\|_1 \le \kappa(A) \cdot \|\delta\hat{b}_1\|_1$ ist realistisch, sie wird angenommen, da der relative Fehler von $\hat{x}_1$ von $O(10^5)$.

$\|\delta\hat{x}_2\|_1 \le \kappa(A) \cdot \|\delta\hat{b}_2\|_1$ hingegen ist zu pessimistisch, der relative Fehler von $\hat{x}_2$ ist gleich gross wie derjenige von $\hat{b}_2$!

Lösung 4

a)

b)

Lösung 5

a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Determinante von $A \neq 0$:

Lösung 6

a)

b)

Lösung 7

Gauss-Algorithmus
Schema nach einem Schritt (Spalten vertauschen!):

x_2	x_1	x_3	1
-1	$-a$	$a-1$	0
.	$-a(a+1)$	$a(a+2)$	0
.	.	a	0

a) Drei Pivots verschieden Null, d.h. für $a \neq 0$ und $a \neq -1$. Lösung $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, (8) hat nur die triviale Lösung (drei Ebenen, die sich im Ursprung schneiden).

b)
- $a = 0:$, $r = 1$ zwei freie Parameter:

x_2	x_1	x_3	1
-1	0	-1	0
.	0	0	0
.	.	0	0

  $x_1 = \mu$ und $x_3 = \nu$, Lösung $x = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\mu, \nu \in \mathbb{R}$
  (drei zusammenfallende Ebenen, die durch den Ursprung gehen).
- $a \neq 0$ und $a \ = -1$: $r = 2$, ein freier Parameter:

x_2	x_1	x_3	1
-1	1	-2	0
.	0	-1	0
.	.	0	0

  $x_1 = \mu$, Lösung $x = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$
  (drei Ebenen, die sich in einer Ursprungsgeraden schneiden).

c) Nicht möglich, (8) hat mindestens *eine* Lösung, cf. a) und b).

Lösung 8

a) $(x-1)(x+4)=0 \Longrightarrow s_1=1$ und $s_2=-4$.

b) $s_1=1$ soll attraktiver Fixpunkt sein. $x_{k+1}=F(x_k)$, wobei $F(x)=-\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{3}$ mit $F'(x)=-\frac{2}{3}x$, also $q \approx |F'(x_0)| = \frac{4}{3} > 1$ Der wirkliche Wert für q ist: $q=|F'(s_1)|=\frac{2}{3}$.

c)
$$x_0=2 \quad x_1=F(x_0)=0 \quad x_2=F(x_1)=\frac{4}{3} \quad x_3=F(x_2)=\frac{20}{27}$$

und damit
$$x_0'=x_0-\frac{(x_1-x_0)^2}{x_2-2x_1+x_0}=\frac{4}{5} \qquad x_1'=x_1-\frac{(x_2-x_1)^2}{x_3-2x_2+x_1}=\frac{12}{13}$$

und schliesslich
$$q_{\text{Aitken}} \approx \left|\frac{\frac{12}{13}-1}{\frac{4}{5}-1}\right| = \frac{5}{13}$$

Obwohl der Startwert x_0 schlecht ist, (da $q \approx |F'(x_0)| > 1$), ist dieser Näherungswert für q_{Aitken} bereits sehr gut und deutlich kleiner als q.

Lösung 9

$$\text{a) } z_a=\frac{4}{5}(1-2j) \qquad\qquad \text{b) } z_b=\frac{1}{205}(56-53j)$$

Lösung 10

a)
$$z_{1.2}=\frac{-1-j\pm\sqrt{4-10j}}{2(1-j)}$$

b) $z_1=0$, $z_2=2-j$ und $z_3=-3-2j$

Lösung 11

a) (3): $(x+3)^2+(y+1)^2=25$ Kreis mit Mittelpunkt $M(-3,-1)$ und Radius $r=5$.

b) (4): $x+y=1$, Gerade durch die Punkte $(0,1)$ und $(1,0)$

(3) und (4) gleichzeitig: Schnittpunkte von Kreis und Gerade, also $P_1(2,-1)$ und $P_2(-3,4)$

alte Lösungen

Lösung 12

a) Mit dem Gauss-Algorithmus: Endschema:

x	y	z	1
2	3	1	0
.	2	4	0
.	.	3	0

d.h. der Rang $r = 3$, d.h. die drei Vektoren sind linear unabhängig.

b)

$$\vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung 13

a) i)

ii)

b)

Lösung 14

Gauss-Algorithmus

Schema nach einem Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	$4 - \frac{a^2}{2}$	$-2a$	$1 - 2a$

Schema nach zwei Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	.	$8 - 2a - a^2$	$7 - 2a - \frac{3}{4}\,a^2$

a)

b)

c)

d)

Lösung 15

a) $F \in g$, d.h. $F(-3+\mu, -3+7\mu, 1+3\mu)$ und damit $\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 5-\mu \\ 6-7\mu \\ 4-3\mu \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a} \cdot \overrightarrow{FA} = 0 \Longrightarrow \mu = 1$

und damit $F(-2,4,4)$. Also $g' :\ \vec{r} = \overrightarrow{0A} + \mu\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{0A'} = \overrightarrow{0A} + 2\overrightarrow{AF} \Longrightarrow A'(-6,5,3)$

Lösung 16

Gauss-Algorithmus, Endschema:

0	0	1	-1	-2	1
1	0	0	-1	-5	6
0	1	0	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{27}{5}$

a)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{27}{5} \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) erster Schritt: $Lc = Pb$, wobei $Pb = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 27 \end{pmatrix} \Longrightarrow c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 27 \end{pmatrix}$

zweiter Schritt: $Rc = x \Longrightarrow x = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$

Lösung 17

a) $g:\ \vec{r} = \overrightarrow{0P_0} + \mu\vec{a}$

$E_1:\ \vec{r} = \overrightarrow{0A} + \alpha\vec{a} + \beta\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und damit

$E_1:\ 4x + 6y + 3z = 15$

b) $V = \frac{h}{3}G$: Schnittpunkte der Ebene E_1 mit den Koordinatenachsen und $z = -3$ liefert die Punkte $(0,0,-3)$, $(0,0,5)$, $(6,0,-3)$, $(0,4,-3)$ und somit $h = 8$ und $G = 12$ woraus $V = 32$ resultiert.

Lösung 18

Endschema:

x	y	z	1
1	0	-13	-38
.	1	-7	-19

also $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} -38 \\ -19 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$

alte Lösungen

Lösung 19

a)

b) Endschema:

x_1	x_2	x_3	x_4	1
1	0	1	-2	2
.	1	-2	3	-1
.	.	7	-6	5
.	.	.	.	2

Das Glgsyst hat keine Lösung, da $r = 3$ und die letzte Zeile $0 = 2$ ein Widerspruch darstellt!

Lösung 20

Endschema:

b_{11}	b_{12}	b_{21}	b_{22}	1
2	-1	1	0	-3
.	5	0	1	12
.	.	-1	-1	-5
.	.	.	2	-6

also $b_{22} = -3$, $b_{21} = 8$, $b_{12} = 3$ und $b_{11} = -4$

$B = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$, das gegebene Problem hat genau eine Lösung.

Lösung 21

Endschema:

x	y	z	1
2	3	1	1
.	1	$(2t-1)$	-1
.	.	$(1-6t)(1-2t)$	$3(1-2t)$

a) $t \neq \frac{1}{2}$ und $t \neq \frac{1}{6}$, Rang $r = 3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{1-6t} \begin{pmatrix} -4-3t \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) $t = \frac{1}{6}$, letzte Zeile: $0 = 2$ ist ein Widerspruch!

c) $t = \frac{1}{2}$, Rang $r = 2$, $z = \mu =$ freier Parameter, $y = -1$ und $x = 2 - \frac{\mu}{2}$ und somit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}$$

Lösung 22

a) $s_a = \sum\limits_{k=1}^{10} \left(k \cdot \sum\limits_{n=1}^{2k} n \right) = \sum\limits_{k=1}^{10} k \cdot \frac{2k(2k+1)}{2} = 2 \cdot \sum\limits_{k=1}^{10} k^3 + \sum\limits_{k=1}^{10} k^2 = 2 \cdot \left(\frac{10 \cdot 11}{2}\right)^2 + \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 6050 + 385 = 6435$

b) $s_b = \sum_{n=1}^{N} \left((a-1) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^k \right) = \sum_{n=1}^{N} (a^n - 1) = a \cdot \sum_{n=0}^{N-1} a^{n-1} - N = a \cdot \frac{a^N - 1}{a-1} - N$

Lösung 23

$$\sum_{l=1}^{15} x_l = 20 \qquad \sum_{l=1}^{15} x_l^2 = 25 \quad \text{und damit} \qquad s = \sum_{k=1}^{15} (x_k - 80) = 20 - 15 \cdot 120 = -1780$$

Lösung 24

$$s_N = 2 \cdot \sum_{n=1}^{N} \left\{ \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} \right\} = 3 \cdot \sum_{n=1}^{N} n^2 + \sum_{n=1}^{N} n = N(N+1)^2$$

Lösung 25

$$\sum_{j=1}^{20} x_j = 4 \qquad \sum_{j=1}^{20} x_j^2 = \frac{3}{4} \qquad -3 \cdot \sum_{j=1}^{20} \left(x_j^2 - 2x_j + 1\right) = -3 \cdot \frac{3}{4} + 6 \cdot 4 - 3 \cdot 20 = -\frac{153}{4}$$

$$s = 2 \cdot \sum_{k=1}^{20} x_k - 20 \cdot \frac{153}{4} = 2 \cdot 4 - 5 \cdot 153 = -757$$