Aufgabe 1 *Vektorgeometrie*

Gegeben sind zwei windschiefe Geraden

$$g\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad h\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

sowie ein Punkt $S(-9, 9, 0)$ im Grundriss.
Gesucht ist eine Lichtrichtung so, dass sich die Schatten der Geraden g und h auf der Grundrissebene im Punkt S schneiden.

Tipp: Überlegen Sie sich, was diese Aufgabe mit einer Transversalen zu tun hat.

Aufgabe 2 *Determinanten*

a) Bestimmen Sie die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \cos(2\varphi) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \cos(2\varphi) & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cos(2\varphi) \end{pmatrix}$$

b) Für welche Werte von λ hat das Gleichungssystem (1) nicht–triviale Lösungen?

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{cccl} (\lambda-3)x_1 & + & x_2 & = 0 \\ x_1 & + & (\lambda-3)x_2 & = 0 \end{array} \right.$$

Aufgabe 3 *Trigonometrie, Zeigerdiagramm*

a) Bestimmen Sie *alle* Lösungen von (2):

$$(2) \qquad \sin(2x) - \cos(x) = \frac{1}{\tan(x)}$$

b) Gegeben sind die beiden harmonsichen Schwingungen

$$(3) \qquad y_1 = f_1(t) = 2\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$(4) \qquad y_2 = f_2(t) = -4\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Zeigerdiagramms für $t = 0$ die Amplitude A und die Phase φ der Überlagerung $y = y_1 + y_2 = f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$.

(graphische Darstellung: Einheiten auf beiden Achsen 4 Häuschen)

Aufgabe 4 *Kondition eines Gleichungssystems*

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 10^{-5} & 10^{-5} \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ und der rechten Seite $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die exakte Lösung ist $x_e = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Kondition $\kappa(A)$ von A in der $\|\ldots\|_1$ − Norm.

b) Betrachten Sie nun für kleine positive ε die folgenden fehlerbehafteten rechten Seiten:

$$\text{b1) } \hat{b}_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{b2) } \hat{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+\varepsilon \end{pmatrix}$$

und berechnen Sie mit Hilfe von A^{-1} die entsprechenden Lösungen $\hat{x}_1$ und $\hat{x}_2$.

c) Bestimmen Sie für die beiden Lösungen aus b) die relativen Fehler $\|\delta\hat{x}_1\|_1$ und $\|\delta\hat{x}_2\|_1$.
Vergleichen Sie diese relativen Fehler mit der theoretisch hergeleiteten Abschätzung.
Interpretation?

Aufgabe 5 *komplexe Zahlen* $\mathbb{C}$

a) Gesucht sind Real-und Imaginärteil von:

$$z_a = \frac{1-j}{1+2j} - \frac{1+3j}{1-2j}$$

b) Gegeben ist $z_0 = -3 - j$.
Gesucht sind alle Punkte in der komplexen Ebene, die gleichzeitig

$$(5) \qquad |z - z_0| = 5$$
$$(6) \qquad Re(z) + Im(z) = 1$$

erfüllen. Stellen Sie zudem (5) und (6) in der Gauss'schen Ebene graphisch dar.
(Einheiten auf beiden Achsen zwei Häuschen)

c) Stellen Sie die Lösungen von $z^6 + 64j = 0$ in der komplexen Ebene als Zeiger graphisch dar.
(graphische Darstellung: Einheiten auf beiden Achsen 4 Häuschen)

Aufgabe 6 *Diskussion der Lösungen*

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem

$$(7) \qquad Ax = b$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -a \\ -2 \end{pmatrix}.$$

a) Wann hat (7) genau eine Lösung?

b) Wann hat (7) $\infty-$ viele Lösungen, mit wievielen freien Parametern?

c) Wann hat (7) keine Lösung?

Geben Sie in den Fällen a) und b) die Lösungen an.

d) Geometrische Interpretation von a) - c).