Aufgabe 1

Gegeben sind zwei windschiefe Geraden

$$g\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad h\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

sowie ein Punkt $S(-9, 9, 0)$ im Grundriss.
Gesucht ist eine Lichtrichtung so, dass sich die Schatten der Geraden g und h auf der Grundrissebene im Punkt S schneiden.

Tipp: Überlegen Sie sich, was diese Aufgabe mit einer Transversalen zu tun hat.

Aufgabe 2

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem

$$Ax = b \tag{1}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -a \\ -2 \end{pmatrix}.$$

a) Wann hat (1) genau eine Lösung?

b) Wann hat (1) $\infty-$ viele Lösungen, mit wievielen freien Parametern?

c) Wann hat (1) keine Lösung?

Geben Sie in den Fällen a) und b) die Lösungen an.

d) Geometrische Interpretation von a) - c).

Aufgabe 3

a) Gegeben sind die beiden harmonsichen Schwingungen

$$y_1 = f_1(t) = 2\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \tag{2}$$

$$y_2 = f_2(t) = -4\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) \tag{3}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Zeigerdiagramms für $t = 0$ die Amplitude A und die Phase φ der Überlagerung $y = y_1 + y_2 = f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$.

(graphische Darstellung: Einheiten auf beiden Achsen 4 Häuschen)

b) Stellen Sie die Lösungen von $z^6 + 64j = 0$ in der komplexen Ebene als Zeiger graphisch dar.

(graphische Darstellung: Einheiten auf beiden Achsen 4 Häuschen)

Aufgabe 4

Gegeben ist die Gleichung

$$x^2 + 3x - 4 = 0. \tag{4}$$

a) Bestimmen Sie algebraisch die Lösungen s_1 und s_2 von (4).

b) (4) wird nun mit gewöhnlicher Iteration numerisch gelöst. Dabei soll die betragsmässig kleinere Lösung ein attraktiver Fixpunkt sein.

   Geben Sie eine geeignete Iterationsgleichung an.

   Berechnen Sie damit ausgehend vom Startwert $x_0 = 2$ die Folgewerte x_1 und x_2.

   Bestimmen Sie $q \approx |F'(x_2)|$.

   Wie gross ist der Konvergenzquotient q wirklich?

c) Berechnen Sie ausgehend von $x_0 = 2$ die Werte x_1, x_2 und x_3 sowie die Werte x_0' und x_1' nach dem *Aitken'schen* Δ^2- Verfahren.

   Bestimmen Sie damit den Näherungswert

$$q_{\text{Aitken}} \approx \left| \frac{x_1' - s_1}{x_0' - s_1} \right|.$$

   Vergleichen Sie diesen Näherungswert für q_{Aitken} mit q aus b).

Aufgabe 5

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 10^{-5} & 10^{-5} \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ und der rechten Seite $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die exakte Lösung ist $x_e = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Kondition $\kappa(A)$ von A in der $\|\ldots\|_1 -$ Norm.

b) Betrachten Sie nun für kleine positive ε die folgenden fehlerbehafteten rechten Seiten:

$$\text{b1)}\ \hat{b}_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{b2)}\ \hat{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+\varepsilon \end{pmatrix}$$

   und berechnen Sie mit Hilfe von A^{-1} die entsprechenden Lösungen $\hat{x}_1$ und $\hat{x}_2$.

c) Bestimmen Sie für die beiden Lösungen aus b) die relativen Fehler $\|\delta\hat{x}_1\|_1$ und $\|\delta\hat{x}_2\|_1$.

   Vergleichen Sie diese relativen Fehler mit der theoretisch hergeleiteten Abschätzung.

   Interpretation?

Aufgabe 6

a) Bestimmen Sie die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \cos(2\varphi) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \cos(2\varphi) & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cos(2\varphi) \end{pmatrix}$$

b) Für welche Werte von λ hat das Gleichungssystem (5) nicht–triviale Lösungen?

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} (\lambda-3)x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ x_1 & + & (\lambda-3)x_2 & = & 0 \end{array} \right. \tag{5}$$

MLAN1/2 Lösungen Assessment 19.08.08

Lösung 1 *Vektorgeometrie*

Die Gerade l ist eine Transversale von g und h durch den Punkt S, wobei der Richtungsvektor von l die gesuchte Lichtrichtung ist.
Es sind verschiedene Lösungen möglich, z.B.:

a) $E_a = E_a(g, S)$, $P = h \cap E_a \Longrightarrow l\colon \vec{r} = \overrightarrow{0S} + \mu\overrightarrow{SP}$

$E_a\colon 14x + 12y - 17z = -18 \Longrightarrow P(1, 3, 4)$ und $l\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$.

b) $E_b = E_b(h, S)$, $Q = g \cap E_b \Longrightarrow l\colon \vec{r} = \overrightarrow{0S} + \mu\overrightarrow{SQ}$

$E_b\colon 4x + 14y + 11z = 90 \Longrightarrow Q(-4, 6, 2)$ und $l\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Die gesuchte Lichtrichtung ist parallel zum Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Lösung 2 *Diskussion der Lösungen*

Gauss-Algorithmus

Tableau nach zwei Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
1	0	1	$-a$
.	1	$-a$	$-1+a^2$
.	.	$a-1$	$-(a-1)^2$

a) $a \neq 1$: $x_3 = -a + 1$, $x_2 = a - 1$ und $x_1 = -1$.

b) $a = 1$: vorzeitiger Abbruch nach zwei Schritten, d.h. ein freier Parameter.

Tableau für $a = 1$:

x_1	x_2	x_3	1
1	0	1	-1
.	1	-1	0
.	.	0	0

, d.h. $x_3 = \mu \in \mathbb{R}$, also

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R}.$$

c) unmöglich, cf. a) und b).

d)
- Fall a): drei Ebenen, die sich in einem Punkt schneiden.
- Fall b): drei Ebenen, die sich in einer Geraden schneiden.
- Fall c): So wie die Ebenen gegeben sind, haben sie immer mindestens einen Punkt gemeinsam.

Lösung 3 *Harmonische Schwingungen und Zeiger*

a) $f_2(t) = -4\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) = 4\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3} + \pi\right) = 4\sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$
Diagramm: $\vec{a}_1(0) = \overrightarrow{0P_1}$, wobei $P_1\left(2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},\, 2 \cdot \frac{1}{2}\right)$ und $\vec{a}_2(0) = \overrightarrow{0P_2}$, wobei $P_2\left(4 \cdot (-\frac{1}{2}),\, 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
Amplitude $A = |\vec{a}(0)| = |\vec{a}_1(0) + \vec{a}_2(0)| = 2\sqrt{5}$
Phase φ: $\tan(\varphi) = \frac{y_1+y_2}{x_1+x_2} = \frac{1+2\sqrt{3}}{-2+\sqrt{3}} < 0 \Longrightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{1+2\sqrt{3}}{-2+\sqrt{3}}\right) + \pi$

b) $z^6 = -64j = 64e^{j\frac{3\pi}{2}} \Longrightarrow z_k = r_k \cdot e^{j\varphi_k}$, $k = 0, 1, \ldots, 5$, wobei
$r_k = \sqrt[6]{64} = 2$ und $\varphi_k = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 5$.
z_0, z_1, …, z_5 sind die Ecken eines um $\frac{\pi}{4}$ verdrehten regulären $6-$ Ecks.

Lösung 4 *Iteration, Beschleunigung bzw. Newton*

a) $(x-1)(x+4) = 0 \Longrightarrow s_1 = 1$ und $s_2 = -4$.

b) $s_1 = 1$ soll attraktiver Fixpunkt sein. $x_{k+1} = F(x_k)$, wobei $F(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}$ mit $F'(x) = -\frac{2}{3}x$,

$$x_0 = 2 \qquad x_1 = F(x_0) = 0 \qquad x_2 = F(x_1) = \frac{4}{3}$$

also $q \approx |F'(x_2)| = \frac{8}{9} < 1$. Der wirkliche Wert für q ist: $q = |F'(s_1)| = \frac{2}{3}$.

c)

$$x_0 = 2 \quad x_1 = F(x_0) = 0 \quad x_2 = F(x_1) = \frac{4}{3} \quad x_3 = F(x_2) = \frac{20}{27}$$

und damit

$$x_0' = x_0 - \frac{(x_1-x_0)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0} = \frac{4}{5} \qquad x_1' = x_1 - \frac{(x_2-x_1)^2}{x_3 - 2x_2 + x_1} = \frac{12}{13}$$

und schliesslich

$$q_{\text{Aitken}} \approx \left|\frac{\frac{12}{13} - 1}{\frac{4}{5} - 1}\right| = \frac{5}{13}$$

Obwohl der Startwert x_0 schlecht ist, (da $q \approx |F'(x_2)| < 1$ nur wenig kleiner als 1, es ist sogar $|F'(x_0)| > 1$!), ist dieser Näherungswert für q_{Aitken} bereits sehr gut und deutlich kleiner als q.

Lösung 5 *Kondition eines Gleichungssystems*

$$A^{-1} = 10^5 \begin{pmatrix} 3 & -10^{-5} \\ -2 & 10^{-5} \end{pmatrix}$$

a) Spaltenmaximum: $\|A\|_1 = 3 + 10^{-5}$ und $\|A^{-1}\|_1 = 5 \cdot 10^5$ und damit $\kappa(A) = 15 \cdot 10^5 + 5$

b) b1) $\hat{x}_1 = A^{-1}\hat{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 + 3\varepsilon 10^5 \\ 1 - 2\varepsilon 10^5 \end{pmatrix} = x_1 + \Delta x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon 10^5 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

b2) $\hat{x}_2 = A^{-1}\hat{b}_2 = (1+\varepsilon)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = x_2 + \Delta x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\|x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{2} |x_k|$, Summe der Beträge.

$\|\delta\hat{x}_1\|_1 = \frac{\|\Delta x_1\|}{\|x_1\|} = \frac{5}{2}\,\varepsilon\, 10^5$, und $\|\delta\hat{b}_1\|_1 = \frac{\|\Delta b_1\|}{\|b_1\|} = \varepsilon$, da $\hat{b}_1 = b_1 + \Delta b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}$

$\|\delta\hat{x}_2\|_1 = \frac{\|\Delta x_2\|}{\|x_2\|} = \varepsilon$, und $\|\delta\hat{b}_2\|_1 = \frac{\|\Delta b_2\|}{\|b_2\|} = \varepsilon$, da $\hat{b}_2 = b_2 + \Delta b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$

theoretische Schranke: $\|\delta\hat{x}_1\|_1 \leq \kappa(A) \cdot \|\delta\hat{b}_1\|_1$ ist realistisch, sie wird angenommen, da der relative Fehler von $\hat{x}_1$ von $O(10^5)$.

$\|\delta\hat{x}_2\|_1 \leq \kappa(A) \cdot \|\delta\hat{b}_2\|_1$ hingegen ist zu pessimistisch, der relative Fehler von $\hat{x}_2$ ist gleich gross wie derjenige von $\hat{b}_2$!

Lösung 6 *Determinanten*

a) Entwicklung nach der ersten Spalte:

$$\text{Det}(A) = \cos(2\varphi) \begin{vmatrix} \cos(2\varphi) & 1 & 0 \\ 1 & \cos(2\varphi) & 1 \\ 0 & 1 & \cos(2\varphi) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \cos(2\varphi) & 1 \\ 0 & 1 & \cos(2\varphi) \end{vmatrix}$$

Die beiden $3-$ reihigen Determinanten werden ebenso nach der ersten Spalte entwickelt:

$$\begin{vmatrix} \cos(2\varphi) & 1 & 0 \\ 1 & \cos(2\varphi) & 1 \\ 0 & 1 & \cos(2\varphi) \end{vmatrix} = \cos(2\varphi) \begin{vmatrix} \cos(2\varphi) & 1 \\ 1 & \cos(2\varphi) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \cos(2\varphi) \end{vmatrix}$$

und

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \cos(2\varphi) & 1 \\ 0 & 1 & \cos(2\varphi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(2\varphi) & 1 \\ 1 & \cos(2\varphi) \end{vmatrix}$$

also

$\text{Det}(A) = (\cos^2(2\varphi) - 1)^2 - \cos^2(2\varphi) = \cos^4(2\varphi) - 3\cos^2(2\varphi) + 1$

b) Determinante der System-Matrix muss Null sein, d.h. $(\lambda - 3)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 4)(\lambda - 2) = 0$ $\Longrightarrow \lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = 2$.