Klasse WI08a **MLAN1 – Schlussprüfung** 13. Januar 2008

Name:

Bewertung: Alle Aufgaben haben das gleiche Gewicht.

Aufgabe 1

Gegeben sind die drei Vektoren

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass diese drei Vektoren linear unabhängig sind.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe von Gram-Schmidt aus den gegebenen Vektoren eine orthonormale Basis.

Aufgabe 2

Gegeben sind die beiden Geraden

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{und} \qquad h = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Geraden g und h windschief zueinander sind.

b) Bestimmen Sie den Abstand zwischen g und h.

c) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, die g enthält und parallel zur z-Achse liegt.

Aufgabe 3

Gegeben sind die Matrizen

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; U = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fassen Sie diese Matrizen als erweiterte Koeffizientenmatrizen von linearen Gleichungssystemen der Form $Ax = b$ mit Spaltenvektoren b auf, und beantworten Sie folgende Fragen:

a) Welche Matrizen weisen Zeilenstufenform auf?

b) Welche Matrizen weisen reduzierte Zeilenstufenform auf?

c) Wie gross ist der Rang von V und derjenige der zugehörigen Koeffizientenmatrix A?

d) Wie lautet die Lösungsmenge des zu U gehörigen Gleichungssystems?

Bitte wenden!

Aufgabe 4

a) Gegeben sind die drei Ebenen

$$\begin{array}{rrcrcrcl} E_1: & 2x & + & 8y & + & az & = & 2, \\ E_2: & x & + & 3y & + & z & = & 1, \\ E_3: & -x & + & (a-5)y & + & (1-a)z & = & 0. \end{array}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe von Determinanten diejenigen Werte $a \in \mathbb{R}$, für die sich die drei Ebenen in genau einem Punkt schneiden.

b) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 & 0 \\ y^2 & -4y & -1 & -1 \\ z^2 & -2z & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Gleichung $\det(A) = 5$ eine Kugel K im Raum beschreibt, und bestimmen Sie den Mittelpunkt M und den Radius r von K.

Aufgabe 5

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} a & a & -1 \\ a-1 & a^2-3 & a^2-2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-3 \\ 2a-2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem

a) Genau eine Lösung?

b) Keine Lösung?

c) Unendlich viele Lösungen?

d) Geben Sie für den Fall c) die Lösungsmenge an.

Aufgabe 6

a) Schreiben Sie die Summe

$$s_a = \frac{1}{2} \cdot x^{-1} - \frac{2}{3} \cdot x + \frac{4}{5} \cdot x^3 - \frac{8}{9} \cdot x^5 + \frac{16}{17} \cdot x^7 \mp \ldots - \frac{512}{513} \cdot x^{17}$$

mit dem Summenzeichen in der Form $s_a = \sum\limits_{k=0}^{\cdots} \ldots$

b) Gegegeben sind Gleichungen

$$\sum_{j=1}^{10} (5x_j - 1) = 0 \qquad \text{und} \qquad \sum_{j=1}^{10} (3x_j - 1)^2 = 7.$$

Bestimmen Sie damit die Summe

$$s_b = \sum_{k=1}^{10} \left\{ x_k - \sum_{j=1}^{10} (x_j - 1)^2 \right\}.$$

MLAN1 Lösungen Schlussprüfung 13.01.08

Lösung 1

a) Die Vektoren a_1, a_2, a_3 sind linear unabhängig genau dann, wenn die Gleichung $\alpha\vec{a}_1 + \beta\vec{a}_2 + \gamma\vec{a}_3 = \vec{0}$ nur die Lösung $\alpha = \beta = \gamma = 0$ besitzt. Mit dem Gauss-Algorithmus ergibt sich das Endschema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & \gamma & b \\ \hline 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Der Rang der Koeffizientenmatrix und der erweiterten Koeffizientenmatrix ist jeweils $r = 3$, d.h. die drei Vektoren sind linear unabhängig.

b) Die Vektoren lauten

$$\vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung 2

a) Die Geraden g und h sind windschief genau dann, wenn deren Richtungsvektoren linear unabhängig sind und $g \cap h = \emptyset$ gilt. Die erste Bedingung ist offensichtlich erfüllt. Für die zweite Bedingung müssen die Parameterdarstellungen von g und h einander gleichgesetzt werden. Daraus resultiert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Aus der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$(A, b) = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda & \mu & b \\ \hline 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

ist ersichtlich, dass $\mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A, b)$ gilt, und somit das Gleichungssystem tatsächlich keine Lösung aufweist.

b) Es sei t die Transversale, die g und h in den Punkten P bzw. Q jeweils rechtwinklig schneidet. Aus den Parameterdarstellungen von g und h findet man

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Orthogonalität von $\overrightarrow{PQ}$ zu g und h liefert die beiden Gleichungen

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{und} \qquad \overrightarrow{PQ} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Daraus ergeben sich die Werte

$$\lambda = \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad \mu = -\frac{3}{2}.$$

Somit gilt also

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = 2.$$

c) Durch entsprechende Erweiterung der Parameterdarstellung von g erhält man eine solche der gesuchten Ebene E:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Daraus gewinnt man durch Elimination der Parameter die Koordinatengleichung

$$E: \quad x + y = -3.$$

Lösung 3

a) Nur die Matrizen T und U weisen Zeilenstufenform auf.

b) Nur die Matrix U weist reduzierte Zeilenstufenform auf.

c) Die Ränge lauten $\mathrm{rg}(V) = 3$ und $\mathrm{rg}(A) = 2$.

d) Die Lösungsmenge des zu U gehörigen Gleichungssystems lautet

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ;\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lösung 4

a) Das Gleichungssystem, das die Schnittmenge $E_1 \cap E_2 \cap E_3$ beschreibt, lautet

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & a \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & a-5 & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das Gleichungssystem hat eine eindeutige Lösung genau dann, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix von Null verscheiden ist. Man findet

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 8 & a \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & a-5 & 1-a \end{pmatrix} = a\,(a-2).$$

Die drei Ebenen schneiden sich also genau dann in genau einem Punkt, wenn $a \neq 0$ und $a \neq 2$ gilt.

b) Beispielsweise durch Entwickeln nach der zweiten Zeile findet man

$$\det(A) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2x - 4y - 2z.$$

Durch quadratische Ergänzungen erhält man damit die Kugelgleichung

$$(x + \frac{1}{2})^2 + (y-1)^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = 4.$$

Daraus ist abzulesen:

$$M = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}) \qquad \text{und} \qquad r = 2.$$

Lösung 5

Mit Hilfe des Gauss-Algorithmus erhält man das Schema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & b \\ \hline 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & a^2-a-2 & a-2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+1 & a+3 \end{array}\right).$$

a) Der Fall $a \neq 2$ und $a \neq -1$ ist äquivalent zu $\mathrm{rg}(A) = 3$ und dies wiederum ist äquivalent zur Eindeutigkeit der Lösung des Gleichungssystems.

b) Der Fall $a = -1$ bedeutet $\mathrm{rg}(A) = 2$ und $\mathrm{rg}(A, b) = 3$. Also hat das Gleichungssystem keine Lösung.

c) Der Fall $a = 2$ bedeutet $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A, b) = 2$. Also hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen mit einem freien Parameter.

d) Die Lösungsmenge im Fall c) lautet

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ;\ \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lösung 6

a) Die Summe lautet

$$s_a = \sum_{k=0}^{9} (-1)^k \, \frac{2^k}{2^k+1} \, x^{2k-1}.$$

b) Aus den Gleichungen

$$\sum_{j=1}^{10} (5x_j - 1) = 0 \qquad \text{und} \qquad \sum_{j=1}^{10} (3x_j - 1)^2 = 7.$$

erhält man schrittweise die Gleichungen

$$\sum_{j=1}^{10} x_j = 2 \qquad \text{und} \qquad \sum_{j=1}^{10} x_j^2 = 1.$$

Eingesetzt in den Ausdruck für die Summe s_b ergibt sich damit schliesslich

$$s_b = -68.$$