Klasse WI07a **MLAN3 - Nachklausur** 28. Januar 2009

Name:

Aufgabe 1

a) Gesucht ist für $a > 0$ das bestimmte Integral

$$I = \int_0^a f(x)\,dx \qquad \text{wobei} \qquad f(x) = 1 + \frac{x^2}{10}$$

Es soll mit der Unter- und Obersumme numerisch integriert werden mit äquidistanter Zerlegung des Intervalls $[0, a]$.

Wie gross muss $n \in \mathbb{N}$ sein, damit $O_n - U_n < \frac{a^2}{1000}$ erfüllt ist?

b) Gegeben ist das charakteristische Polynom

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 5$$

einer $3 \times 3-$ Matrix A. Wie gross sind die Determinante und die Spur von A? Weiter ist bekannt, dass $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ ein Eigenwert von A ist. Bestimmen Sie die restlichen Eigenwerte.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & b \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von B.

b) Bestimmen Sie - in Abhängigkeit des Parameters b - zu jedem Eigenwert die zugehörigen Eigenvektoren.

c) Für welche Werte von b ist die Matrix B diagonalisierbar? (*mit* Begründung)

Aufgabe 3

Sei $V = \mathbb{P}_2$ der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 definiert auf dem Intervall $[0,\, 1]$.
Eine lineare Abbildung $\mathcal{F} :\; \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ ist mit

$$(\mathcal{F}(p)) := p(1-x) - x^2 \cdot p''(x)$$

definiert.

a) Betrachten Sie die Monome als Basis und bestimmen Sie die Abbildungsmatrix F von $\mathcal{F}$ bzgl. dieser Basis.

b) Bestimmen Sie das Bild und den Kern von F und $\mathcal{F}$.

c) Für welche $p(x) \in V$ gilt $\mathcal{F}(p) = c \cdot p$, mit $c =$ konstant.

Aufgabe 4

Wir betrachten den Vektorraum $V = C[0,\, 2\pi]$ mit dem Skalarprodunkt

$$(f,\, g) := \int\limits_0^{2\pi} f(x)g(x)\, dx.$$

$U = span\,\{1,\, \sin(x),\, \sin(2x),\, \sin(3x)\}$ ist ein $4-$ dimensionaler Unterraum $U \subset V$.

a) Ortho-normalisieren Sie die für U gewählte Basis.

b) Projizieren Sie die Funktion $h(x) = x$ auf U.

Aufgabe 5

Bezüglich einer neuen Basis Σ_{neu} aufgespannt von $b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist der linearen Abbildung $\mathcal{F} :\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die Abbildungsmatrix $F_{neu} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ zugeordnet.

a) Bestimmen Sie die Matrix T der Koordinatentransformation $\tau :\ \Sigma_{neu} \longrightarrow \Sigma_e$ und ihre Inverse T^{-1}.

b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix F von $\mathcal{F}$ bzgl. Σ_e.

c) Ein Bildpunkt $\mathcal{F}(P)$ hat bzgl. Σ_{neu} die Koordinaten $\frac{1}{3}(16,\, 18)$. Bestimmen Sie die Koordinaten von P in der alten Basis Σ_e.

d) Um wieviel werden die Eigenvektoren von $\mathcal{F}$ bzgl. Σ_e gestreckt?

Aufgabe 6

a) Gegeben ist $V = C^1[-2,\, 0]$. Seien $f(x) \in V$ und $g(x) \in V$ zwei Vektoren aus V.
Ist mit

$$(f,\, g) := \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{0} f'(x)g(x)\, dx + f(-1)\cdot g(0)$$

ein Skalarprodukt definiert? (*mit* Begründung)

b) Welche der folgenden Mengen bilden ein Erzeudensystem bzw. eine Basis des Vektorraums der Polynome vom Grad 2?

(1)	$\{1,\, 2x^2,\, x^2 + 2\}$
(2)	$\{4,\, 3x - 1,\, 2x^2 + 1, x^3 - 1\}$
(3)	$\{2,\, x - 3,\, 2x^2 - 1, x^2 - 2x\}$
(4)	$\{x - 1,\, x + 1,\, 2x^2\}$

(*mit* Begründung)

Lösungen Nachklausur 28.01.09

Lösung 1

a) $\Delta x = \frac{a}{n}$ mit $x_k = k \cdot \Delta x$, $k = 0, 1, 2, \ldots n$

$$O_n - U_n = \Delta x(f(b) - f(a)) \Longrightarrow O_n - U_n = \frac{a}{n}\left(1 + \frac{a^2}{10} - 1\right) < \frac{a^2}{1000} \Longrightarrow n > 100a$$

b) $\mathsf{Spur}(A) = 2 = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k$ und $\det(A) = -5 = \prod_{k=1}^{3} \lambda_k$

$\lambda_1 = \frac{1}{2} : \lambda_2 + \lambda_3 = \frac{3}{2}$ und $\lambda_2 \cdot \lambda_3 = -10 \Longrightarrow \lambda_2 = -\frac{5}{2}$ und $\lambda_3 = 4$.

Lösung 2

a) $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$ und $\lambda_3 = -2$

b) $E_{-2} = span\{\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{b}{8} \\ 1 \end{pmatrix}\}$, geom VF = alg VF = 1.

- $b \neq 0 : E_6 = span\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, geom VF $= 1 <$ alg VF $= 2$.
- $b = 0 : E_6 = span\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, geom VF = alg VF = 2.

c) B ist diagonalisierbar genau dann, falls geom VF = alg VF für jeden EW, d.h. falls $b = 0$.

Lösung 3

Basis: $e_1 = 1$, $e_2 = x$ und $e_3 = x^2$

a) $\mathcal{F}(e_1) = 1 = e_1$, $\mathcal{F}(e_2) = 1 - x = e_1 - e_2$, $\mathcal{F}(e_3) = 1 - 2x - x^2 = e_1 - 2e_2 - e_3$

und damit $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $Kern(F) = 0$ und $Bild(F) = \mathbb{R}^3$, da F eine reguläre Matzrix, d.h.

$Kern(\mathcal{F}) =$ Nullpolynom und $Bild(\mathcal{F}) = P_2 =$ alle möglichen Polynome vom Grad 2.

c) EWP von F: $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_{2.3} = -1$

$v^{(1)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v^{(2)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

also $p_1(x) = \mu$ mit $\mathcal{F}(p_1(x)) = 1 \cdot p_1(x)$ und $p_2(x) = \mu(1 - 2x)$ mit $\mathcal{F}(p_2(x)) = (-1) \cdot p_2(x)$

Lösung 4

a) Die gegebene Basis ist bereits orthogonal, cf. Serie 3, Aufgabe 5 b).

Normalisierung: $(\sin(kx), \sin(kx)) = \int\limits_0^{2\pi} \sin^2(kx)\,dx = \pi$, cf. Serie 3, Aufgabe 5 b).

Ortho-Normalbasis: $e_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $e_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx)$, $k = 1, 2, 3$

b) $\mathcal{P}(h) = \sum\limits_{k=0}^{3} (h, e_k)\, e_k = c_0e_0 + c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3$

$c_0 = (h, e_0) = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot x\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi^2$ und $c_k = (h, e_k) = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx) \cdot x\,dx = (-\frac{2\pi}{k}) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $k = 1, 2, 3$

und eingesetzt: $\mathcal{P}(h(x)) = \pi - \frac{2}{1}\sin(x) - \frac{2}{2}\sin(2x) - \frac{2}{3}\sin(3x)$

Matlab-File: `NMMa3_131206.m`

Lösung 5

a) $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ und $T^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $F = TF_{neu}T^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

c) Koordinaten von P bzgl. Σ_{neu} : $(F_{neu})^{-1}\begin{pmatrix} 16/3 \\ 18/3 \end{pmatrix} = (-\frac{1}{2})\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 16 \\ 18 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}$

und schliesslich: $x_{alt} = Tx_{neu} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

d) EW von F in Σ_e bzw. EW von F_{neu} in Σ_{neu}. Da F und F_{neu} ähnliche Matrizen, sind ihre EW identisch: $\lambda_{1.2} = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{33}}{2}$

Lösung 6

a) nein, denn $(f, g) \neq (g, f)$, d.h. die Symmetrie ist verletzt.

b) (1): weder noch.

(2): ja, ist ein Erzeugendensystem von $\mathbb{P}_2$ aber keine Basis, denn $x^3 - 1$ ist überflüssig.

(3): ja, ist ein Erzeugendensystem von $\mathbb{P}_2$, keine Basis, denn z.B. $x^2 - 2x$ ist überflüssig. Für eine Basis genügen die ersten drei oder erstes, zweites und viertes Element, (dann wäre das dritte überflüssig).

(4): ja, ist ein Erzeugendensystem *und* eine Basis, kein überzähliges Element.