Klasse WI07a **MLAN3 erster Test** 17. Oktober 2008

Name:

Aufgabe 1

Betrachten Sie die Quadraturformel

$$Q = \sum_{k=0}^{2} w_k \, f(\xi_k) \qquad \text{mit} \quad \xi_k = 0,\ \frac{h}{2},\ h. \tag{1}$$

im Intervall $[0, h]$.

a) Bestimmen Sie die Gewichte w_k in (1) so, dass alle Polynome bis und mit Grad 2 exakt integriert werden.

b) Benützen Sie (1), um

$$I = \int_a^b f(x)\, dx,$$

numerisch zu integrieren. Dabei sind $a = -\frac{\pi}{2}$, $b = 0$ und $f(x) = \cos(x)$.

Welchen absoluten bzw. relativen Fehler machen Sie dabei?

Aufgabe 2

Gegeben ist das Integral:

$$I = \int_{-1}^{3} (x^3 - 4x + 2)\, dx \tag{2}$$

a) Bestimmen Sie I numerisch mit der Methode von Simpson. Dabei soll das Intervall $[-1, 3]$ in 2 gleichlange Teilintervalle der Länge 2 zerlegt werden.

b) Bestimmen Sie den exakten Wert von I und bestimmen Sie den absoluten Fehler, den Sie mit der Methode in a) machen.

c) Können Sie b) erklären?

Aufgabe 3

a) Gegeben ist die Gleichung

$$jz + Re(1 - z) = \frac{1}{z^{-1}} \tag{3}$$

Bestimmen Sie die Lösung von (3) in kartesischer, sowie in Polarform.

b) Student Y behauptet, dass alle Matrizen der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 + a_2 \\ a_2 & a_1 - a_2 \end{pmatrix}$$

einen Vektorraum V bilden. Hat er Recht? (*mit* Begründung)

Wie gross ist die Dimension von V? Haben Sie eine Vermutung?

WI07a MLAN3 Lösungen erster Test 17.10.08

Lösung 1

a) Zu lösendes Gleichungssystem:

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccc} w_0 & + & w_1 & + & w_2 & = & h \\ & & \frac{h}{2} w_1 & + & h w_2 & = & \frac{h^2}{2} \\ & & \frac{h^2}{4} w_1 & - & h^2 w_2 & = & \frac{h^3}{3} \end{array} \right.$$

Lösung von (4): $w_0 = w_2 = \frac{h}{6}$ und $w_1 = \frac{4h}{6}$, mit dem Gauss-Algorithmus (ein Schritt und Rückwärtseinsetzen).

b) $[0, h] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, 0]$, wobei $x = x(\xi) = m\xi + q$. Hier $x = \frac{\pi}{2h} \cdot \xi - \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \xi \leq h$.

$I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos(x)\, dx \approx Q = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 4 \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos(0)\right) = \frac{\pi}{12}\left(2\sqrt{2} + 1\right)$.

Fehler: absoluter Fehler $\Delta I = |Q - I| = \left|\frac{\pi}{12}\left(2\sqrt{2}+1\right) - 1\right|$ und

relativer Fehler $\delta I = \frac{\Delta I}{I} = \Delta I$, da $I = 1$. Relativer Fehler in Prozenten: $\Delta I \cdot 100\%$.

Lösung 2

a) $h = 2$: Simpson: $I \approx \frac{2}{6}\{f(-1) + 4f(0) + 2f(1) + 4f(2) + f(3)\}$ mit $f(x) = x^3 - 4x + 2$

$$f(-1) = 5 \quad f(0) = 2 \quad f(1) = -1 \quad f(2) = 2 \quad f(3) = 17 \quad \Longrightarrow I \approx 12$$

b) $I = \int\limits_{-1}^{3} f(x)\, dx = 12$, der absolute Fehler ist Null! In a) haben wir den exakten Wert.

c) $|I - S(h)| \leq \frac{b-a}{180} h^4 \cdot M_4$, wobei $M_4 =$ absolutes Maximum der $4-$ten Ableitung von f, hier ist $f^{(4)} \equiv 0$

Lösung 3

a) $z = \frac{1}{3}(1 + j) = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$

b)

$$A \in V: A = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 + a_2 \\ a_2 & a_1 - a_2 \end{pmatrix} \quad B \in V: B = \begin{pmatrix} b_1 & b_1 + b_2 \\ b_2 & b_1 - b_2 \end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} c_1 & c_1 + c_2 \\ c_2 & c_1 - c_2 \end{pmatrix} \quad c_k = a_k + b_k, k = 1, 2 \quad \Longrightarrow A + B \in V$$

$$C = \alpha \cdot A = \begin{pmatrix} c_1 & c_1 + c_2 \\ c_2 & c_1 - c_2 \end{pmatrix} \quad c_k = \alpha \cdot a_k, k = 1, 2 \quad \Longrightarrow \alpha \cdot A \in V$$

D.h. V ist ein Vektorraum, Student Y hat Recht.

$\dim(V) = 2$

Aufgabe 4 *neu*

Gegeben ist das Integral:

$$I = \int_{-1}^{1} e^{-x}\, dx \tag{5}$$

I soll numerisch mit einer Obersumme bestimmt werden. Dabei soll das Intervall $[-1,\, 1]$ in n gleichlange Teilintervalle zerlegt werden.

a) Wie gross muss n mindesten sein, um I mit einem absoluten Fehler kleiner $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$ zu berechnen?

b) Stundent X ist a) zu aufwendig. Er will (5) mit der Trapez–Methode numerisch bestimmen. Wie gross muss n mindestens sein, damit die in a) gegebene Toleranz erfüllt wird?

d) Stundent Z ist auch b) zu aufwendig. Er will (5) mit der Methode von Simpson numerisch bestimmen. Wie gross muss n mindestens sein, damit die in a) gegebene Toleranz erfüllt wird?

Aufgabe 5 *alt*

Gegeben ist $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$

a) Bilden Sie $A = v \cdot v^T$. Wie gross ist der Rang von A?

b) $U = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \middle|\ Ax = 0 \right\}$.
Geben Sie eine Basis für U an, wie gross ist die Dimension von U?

Aufgabe 6 *alt*

a) Gegeben ist das Skalarprodukt

$$(f, g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot g(x)\, dx. \tag{6}$$

Bestimmen Sie den Winkel zwischen $f_2(x) = \sin(2x)$ und $g_3(x) = \cos(3x)$ bzgl. (6).

b) Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{P}_5$ ($=$ Polynome vom Grad ≤ 5).
Gegeben ist $U = \text{span}\left\{1 + x + x^5, x^2 + x^4, 1 - x^2 + x^3 - x^5, x - x^3 - x^4 + 2x^5\right\}$.
Bestimmen Sie eine Basis von U, $\dim(U) =$?

Aufgabe 7 *alt*

a) Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^{3\times3}$ der $3 \times 3-$ Matrizen.
Sei $U = \left\{ A \in V \middle|\ A^T = -A \right\}$. Bildet die Teilmenge U einen Unterraum in V?
Falls ja, wie gross ist die Dimension von U?

b) Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Die Spalten $a^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$, von A bilden eine Basis in $\mathbb{R}^3$.

Bestimmen Sie ausgehend von den $a^{(k)}$ mit dem Verfahren von Gram – Schmidt eine ortho – normierte Basis von $\mathbb{R}^3$.

Lösung 4

f ist monoton fallend, d.h. für die Obersumme muss am linken Rand der Teilintervalle ausgewertet werden.

a) $\Delta x = \frac{2}{n}$ und $x_k = -1 + k \cdot \Delta x$ für $k = 1,\, 2,\, \ldots$, also

$$\begin{aligned} O_n &= \Delta x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \\ &= \Delta x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^{-x_k} = \Delta x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^{1-k\cdot\frac{2}{n}} \\ &= \frac{2}{n} \cdot e \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^{-k\cdot\frac{2}{n}} = \frac{2}{n} \cdot e \cdot \left(\frac{1-e^{-2}}{1-e^{-\frac{2}{n}}} \right) \end{aligned}$$

geometrische Teilsumme mit $q := e^{-\frac{2}{n}}$

b) $n > \frac{b-a}{\varepsilon} \cdot |f(b) - f(a)| = \frac{2}{5} \cdot 10^4 \left(\frac{e^2-1}{e} \right)$

Lösung 5

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \end{pmatrix}$, Rang$(A) = 1$

b) Schema nach einem Schritt:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1
1	2	3	4	5	0

4 freie Parameter: $x_{k+1} = \mu_k$, $k = 1, \ldots, 4$, also span$(U) = \{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$

und damit dim$(U) = 4$.

Lösung 6

a) $\sin(2x) \cdot \cos(3x) = \frac{1}{2}\,\{\sin(-x) + \sin(5x)\} = \frac{1}{2}\,\{-\sin(x) + \sin(5x)\}$ und damit:

$$(f_2(x), g_3(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} \ldots\, dx = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \cos(x) - \frac{1}{5}\cos(5x) \right\} \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

d.h. f_2 und g_3 sind orthogonal.

b) Endschema:

α_1	α_2	α_3	α_4	1
1	0	1	0	0
.	1	-1	0	0
.	.	1	-1	0
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

Eine Basis ist z.B. $p_1(x) = 1 + x + x^5$, $p_2(x) = x^2 + x^4$ und $p_3(x) = 1 - x^2 + x^3 - x^5$.

Lösung 7

a)
- Seien $A \in U$ und $B \in U$: $(A+B)^T = A^T + B^T = -A - B = -(A+B) \Rightarrow A+B \in U$
- sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $a \in U$: $(\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha(-A) = -\alpha A = -(\alpha A) \Rightarrow \alpha A \in U$

D.h. U ist ein UR in V, $\dim(U) = 3$, da $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \in U$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

b) $b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung 8

a)

b)

c)

Mit dem Gauss-Algorithmus: Endschema:

x	y	z	1
2	3	1	0
.	2	4	0
.	.	3	0

d.h. der Rang $r = 3$, d.h. die drei Vektoren sind linear unabhängig.

Lösung 9

Gauss-Algorithmus

Schema nach einem Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	$4 - \frac{a^2}{2}$	$-2a$	$1 - 2a$

Schema nach zwei Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	.	$8 - 2a - a^2$	$7 - 2a - \frac{3}{4}\,a^2$

a)

b)

c)

d)

Lösung 10

a) $F \in g$, d.h. $F(-3+\mu, -3+7\mu, 1+3\mu)$ und damit $\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 5-\mu \\ 6-7\mu \\ 4-3\mu \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a} \cdot \overrightarrow{FA} = 0 \Longrightarrow \mu = 1$

und damit $F(-2, 4, 4)$. Also $g' :\ \vec{r} = \overrightarrow{0A} + \mu\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{0A'} = \overrightarrow{0A} + 2\overrightarrow{AF} \Longrightarrow A'(-6, 5, 3)$

Lösung 11

Gauss-Algorithmus, Endschema:

0	0	1	-1	-2	1
1	0	0	-1	-5	6
0	1	0	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{27}{5}$

Endschema:

x_1	x_2	x_3	x_4	1
1	0	1	-2	2
.	1	-2	3	-1
.	.	7	-6	5
.	.	.	.	2