Klasse WI07a **MLAN3 zweiter Test** 21. November 2008

Name:

Aufgabe 1

Seien e_1, e_2, ..., e_n die Standardbasisvektoren im $\mathbb{R}^n$.

a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A_1 bezüglich der Standardbasis Σ_e, die zu der linearen Abbildung

$$\mathcal{F}(e_k) = e_{n-k+1} \qquad k = 1, 2, \ldots n \tag{1}$$

gehört.

b) Zeigen Sie ferner, dass durch $v_1 := e_1 + e_2$, $v_2 = e_3$ und $v_3 = 2e_2$ eine weitere Basis des $\mathbb{R}^3$ gegeben ist und bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A_2 von (1) bezüglich dieser Basis.

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 8 & a^2 + a \\ -2 & -1 & a & 3 \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit des Parameters $a \in \mathbb{R}$.

b) Geben Sie für a) die jeweilige Dimension des Unterraums

$$U := \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, Ax = 0 \right\}$$

an.

c) Bestimmen Sie für b) die entsprechenden Basen.

Aufgabe 3

a) Gegeben sei $V = \mathbb{R}^4$.
Ist
$$U = \left\{ (x_1,\, x_2,\, x_1 + 2x_2,\, 2x_1 - x_2)^T \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$
ein Unterraum von V ? (*mit* Begründung)

b) Im Vektorraum $V = \mathbb{P}_3[0, 1]$ ist mit

$$(p, q) := \int_0^1 p(x)q(x)\, dx$$

ein Skalarprodukt definiert.

Bestimmen Sie alle Polynome $3-$ ten Grades, die orthogonal auf $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$ und $p_2(x) = x^2$ sind.

WI07a MLAN3 Lösungen zweiter Test 21.11.08

Lösung 1

a) $\mathcal{F}(e_1) = e_n$, $\mathcal{F}(e_2) = e_{n-1}$, $\mathcal{F}(e_3) = e_{n-2}, \ldots$, $\mathcal{F}(e_n) = e_1$ also

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & 1 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 1 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & & \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) neue Basis: $T = (v_1, v_2, v_3)$ spaltenweise: mit Gauss-Algorithmus: $Tx = 0$, Rang $r = 3$, also bilden v_1, v_2 und v_3 eine Basis im $\mathbb{R}^3$, bzw. die v_k, $k = 1, 2, 3$ sind linear unabhängig.

$\mathcal{F}(v_1) = \mathcal{F}(e_1 + e_2) = \mathcal{F}(e_1) + \mathcal{F}(e_2) = e_3 + e_2 = v_2 + \frac{1}{2}v_3$

$\mathcal{F}(v_2) = \mathcal{F}(e_3) = e_1 = v_1 - \frac{1}{2}v_3$ und

$\mathcal{F}(v_3) = \mathcal{F}(2e_2) = 2e_2 = v_3$, also $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

Lösung 2

Endschema:

x_1	x_2	x_3	x_4	1
1	1	3	-1	0
.	-1	-5	-1	0
.	.	$a+1$	0	0
.	.		$a(a+1)$	0

a)
- $a = -1$: Rang$(A) = 2$
- $a = 0$: Rang$(A) = 3$
- $a \neq -1$ und $a \neq 0$: Rang$(A) = 4$

b)
- dim$(U) = 2$
- dim$(U) = 1$
- dim$(U) = 0$

c)
- $U = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$
- $U = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$
- $U = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ = Nullpunkt im $\mathbb{R}^4$

Lösung 3

a) Seien $x, y \in U$, d.h. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 - x_2 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_1 + 2y_2 \\ 2y_1 - y_2 \end{pmatrix}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, dann gilt:

- $x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ (x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2) \\ 2(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) \end{pmatrix} \in U$ mit Hilfe des Kommutativgesetzes der Addition in $\mathbb{R}$.
- $\alpha x = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_1 + 2\alpha x_2 \\ 2\alpha x_1 - \alpha x_2 \end{pmatrix} \in U$ mit Hilfe des Distributivgesetzes in $\mathbb{R}$.

D.h. U ist ein Unterraum von V.

b) $p_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, $a_k \in \mathbb{R}$

Endschema:

a_0	a_1	a_2	a_3	1
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	0
.	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{10}$	0
.	.	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	0

$a_3 = \mu \in \mathbb{R} =$ freier Parameter: $a_2 = -\frac{3}{2}\mu$, $a_1 = \frac{3}{5}\mu$ und $a_0 = -\frac{1}{20}\mu$
und damit: $p_3(x) = \mu \cdot \left(-\frac{1}{20} + \frac{3}{5}x - \frac{3}{2}x^2 + x^3\right)$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 *neu*

a) Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$f_k(t) = cos^k(t) \qquad 0 \leq k \leq 3$$

und die Funktionen

$$g_k(t) = cos(kt) \qquad 0 \leq k \leq 3$$

den selben Unterraum U in $V = C[0, 2\pi]$ aufpannen. Wie gross ist die Dimension von U?

b) Hintergrundmusik

Ein Ingenieur erhält von der Telekom den Auftrag, die Hintergrundmusik der Telephonzentrale zu installieren. Dazu stehen ihm 3 Tongeneratoren zur Verfügung: die Töne mit der Ferquenz $1000Hz$, $2000Hz$ und $4000Hz$ mit beliebiger, aber konstanter Lautstärke erzeugen können, d.h. er kann die Töne

$$\alpha_1 \cos(1000t) \qquad \alpha_2 \cos(2000t) \qquad \alpha_3 \cos(4000t)$$

generieren. Die Telekom wünscht als Musik

$$f(t) = \cos^2(2000t) - \cos^2(1000t).$$

Wie muss der Ingenieur die Lautstärken α_1, α_2 und α_3 wählen?

Aufgabe 5 *neu*

a) $\mathbb{C}$

b)

Aufgabe 6 *neu*

Seien U_1 und U_2 $4-$ dimensionale Unterräume des $6-$ dimensionalen Vektorraums $V = \mathbb{R}^6$.
Geben Sie alle Dimensionen an, die $U_1 \cap U_2$ bei geeigneter Wahl von U_1 und U_2 haben kann und begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 7 *alt*

Gegeben ist $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$

a) Bilden Sie $A = v \cdot v^T$. Wie gross ist der Rang von A?

b) $U = \{x \in \mathbb{R}^5 | \; Ax = 0\}$.
Geben Sie eine Basis für U an, wie gross ist die Dimension von U?

Aufgabe 8 *alt*

a) Gegeben ist das Skalarprodukt

$$(f,g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot g(x)\,dx. \tag{2}$$

Bestimmen Sie den Winkel zwischen $f_2(x) = \sin(2x)$ und $g_3(x) = \cos(3x)$ bzgl. (2).

b) Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{P}_5$ ($=$ Polynome vom Grad ≤ 5).
Gegeben ist $U = \text{span}\big\{1 + x + x^5, x^2 + x^4, 1 - x^2 + x^3 - x^5, x - x^3 - x^4 + 2x^5\big\}$.
Bestimmen Sie eine Basis von U, dim(U) =?

Aufgabe 9 *alt*

a) Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^{3\times 3}$ der $3 \times 3-$ Matrizen.
Sei $U = \left\{A \in V \,\middle|\, A^T = -A\right\}$. Bildet die Teilmenge U einen Unterraum in V?
Falls ja, wie gross ist die Dimension von U?

b) Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Die Spalten $a^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$, von A bilden eine Basis in $\mathbb{R}^3$.
Bestimmen Sie ausgehend von den $a^{(k)}$ mit dem Verfahren von Gram – Schmidt eine ortho – normierte Basis von $\mathbb{R}^3$.

Lösung 4

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \end{pmatrix}$, Rang$(A) = 1$

b) Schema nach einem Schritt:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1
1	2	3	4	5	0

4 freie Parameter: $x_{k+1} = \mu_k$, $k = 1, \ldots, 4$, also span$(U) = \{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$

und damit dim$(U) = 4$.

Lösung 5

a) $\sin(2x) \cdot \cos(3x) = \frac{1}{2}\{\sin(-x) + \sin(5x)\} = \frac{1}{2}\{-\sin(x) + \sin(5x)\}$ und damit:

$$(f_2(x), g_3(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} \ldots\, dx = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \cos(x) - \frac{1}{5}\cos(5x) \right\} \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

d.h. f_2 und g_3 sind orthogonal.

b) Endschema:

α_1	α_2	α_3	α_4	1
1	0	1	0	0
.	1	-1	0	0
.	.	1	-1	0
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

Eine Basis ist z.B. $p_1(x) = 1 + x + x^5$, $p_2(x) = x^2 + x^4$ und $p_3(x) = 1 - x^2 + x^3 - x^5$.

Lösung 6

a)
- Seien $A \in U$ und $B \in U$: $(A+B)^T = A^T + B^T = -A - B = -(A+B) \Rightarrow A + B \in U$
- sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $a \in U$: $(\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha(-A) = -\alpha A = -(\alpha A) \Rightarrow \alpha A \in U$

D.h. U ist ein UR in V, dim$(U) = 3$, da $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \in U$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

b) $b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung 7

a)

b)

c)

Mit dem Gauss-Algorithmus: Endschema:

x	y	z	1
2	3	1	0
.	2	4	0
.	.	3	0

d.h. der Rang $r = 3$, d.h. die drei Vektoren sind linear unabhängig.

Lösung 8

Gauss-Algorithmus

Schema nach einem Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	$4 - \frac{a^2}{2}$	$-2a$	$1 - 2a$

Schema nach zwei Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	.	$8 - 2a - a^2$	$7 - 2a - \frac{3}{4}\,a^2$

a)

b)

c)

d)

Lösung 9

a) $F \in g$, d.h. $F(-3+\mu, -3+7\mu, 1+3\mu)$ und damit $\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 5-\mu \\ 6-7\mu \\ 4-3\mu \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a} \cdot \overrightarrow{FA} = 0 \Longrightarrow \mu = 1$

und damit $F(-2, 4, 4)$. Also $g' :\ \vec{r} = \overrightarrow{0A} + \mu\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{0A'} = \overrightarrow{0A} + 2\overrightarrow{AF} \Longrightarrow A'(-6, 5, 3)$

Lösung 10

Gauss-Algorithmus, Endschema:

0	0	1	-1	-2	1
1	0	0	-1	-5	6
0	1	0	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{27}{5}$

Endschema:

x_1	x_2	x_3	x_4	1
1	0	1	-2	2
.	1	-2	3	-1
.	.	7	-6	5
.	.	.	.	2