Klasse WI08a **MLAN1 - Test 2** 20. November 2008

Name:

Aufgabe 1

Gegeben sind die vier Punkte $A = (3, 5, 2)$, $B = (4, -8, 6)$, $C = (1, -5, 3)$ und $D = (-1, -1, 1)$.

a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E durch den Punkt D, parallel zu der von den Punkten A, B und C aufgespannten Ebene.

b) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden g zwischen der Grundrissebene und der Ebene E.

c) Bestimmen Sie den Abstand zwischen den Durchstosspunkten P und Q von g mit der Aufriss- bzw. der Seitenrissebene.

Aufgabe 2

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit drei Gleichungen in vier Unbekannten. Bei der Lösung entsteht die folgende erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Handelt es sich hier um eine Zeilenstufenform? Handelt es sich gar um die reduzierte Zeilenstufenform? Begründen Sie Ihre Antworten.

b) Stellen Sie nötigenfalls die reduzierte Zeilenstufenform her.

c) Geben Sie die Ränge r und s von A bzw. (A, b) an.

d) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

Aufgabe 3

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & a^2 & -4 \\ a & 1+2a & -a-1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+a+2 \\ 4a+1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem

a) keine Lösung?

b) unendlich viele Lösungen? Geben Sie in diesem Fall die Lösungen an.

c) genau eine Lösung?

d) Was ist die geometrische Interpretation des Gleichungssystems in den Fällen a), b) und c)?

MLAN1 Lösungen Test 2 20.11.08

Lösung 1

a) Für die Ebene E findet man die Parameterdarstellung

$$E = \left\{\overrightarrow{OD} + \mu\overrightarrow{AB} + \nu\overrightarrow{AC}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix} -2 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mu, \nu \in \mathbb{R}\right\}.$$

Elimination der Parameter liefert E: $-3x + y + 4z = 6$.

Daraus entsteht die Normalform E: $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}y + \frac{2}{3}z = 1$.

b) Aus der Normalform der Koordinatengleichung von E ergeben sich die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen: $S_x = (-2, 0, 0), \quad S_y = (0, 6, 0), \quad S_z = (0, 0, \frac{3}{2})$.

Für die Gerade g erhält man somit

$$g = \left\{\overrightarrow{OS_x} + \alpha\overrightarrow{S_xS_y}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$

c) Der Abstand beträgt $d = |\overrightarrow{S_xS_y}| = 2\sqrt{10}$.

Lösung 2

a) Es liegt keine Zeilenstufenform vor, und damit erst recht keine reduzierte Zeilenstufenform. Grund: Die Anzahl der führenden Nullen nimmt von Zeile zu Zeile nicht kontinuierlich zu.

b) Die reduzierte Zeilenstufenform lautet $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Der Rang von A ist $r = 3$, der Rang von (A, b) ist $s = 3$.

d) Die Lösungsmenge hat $n - r = 1$ freien Paramter und lautet

$$L = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mu \in \mathbb{R}\right\}.$$

Lösung 3

Man erhält die Zeilenstufenform $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a^2 - 4 & a + 2 \end{pmatrix}$.

a) Keine Lösung, falls $a = 2$.

b) Unendlich viele Lösungen, falls $a = -2$.

Die Lösungsmenge lautet in diesem Fall $L = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mu \in \mathbb{R}\right\}$.

c) Genau eine Lösung, falls $a \neq \pm 2$.

d) Schnittmengen dreier Ebenen in $\mathbb{R}^3$ mit den folgenden Konstellationen:

- a) Es gibt keine gemeinsamen Punkte, d.h. $E_1 \cap E_2 \cap E_3 = \emptyset$.
- b) Es gibt eine gemeinsame Schnittgerade $g = E_1 \cap E_2 \cap E_3$.
- c) Es gibt genau einen gemeinsamen Schnittpunkt $S = E_1 \cap E_2 \cap E_3$.