Klasse WI08b **MLAN1 - zweiter Test** 25. November 2008

Name:

Aufgabe 1

a) Gegeben ist eine Gerade $g = g(A, B)$ durch die Punkte $A(-1, -3, 2)$ und $B(5, 1, -6)$, sowie ein Punkt $C(-4, 7, 3)$.

   Gesucht ist eine Parameterdarstellung der Geraden h, die durch C geht g schneidet und parallel zur $xz-$ Ebene ist.

b) Geben Sie die Schnittpunkte von h mit dem Grund– und Aufriss an.

Aufgabe 2

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem

$$Ax = b \tag{1}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -p \\ 2 & 1 & -p \\ p & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ q \end{pmatrix}.$$

a) Wann hat (1) Lösungen mit 2 freien Parametern?

b) Wann hat (1) $\infty-$ viele Lösungen mit einem freien Parameter?

c) Wann ist (1) eindeutig lösbar?

d) Wann hat (1) keine Lösung?

Geben Sie für b) die Lösungen an.

Aufgabe 3

Gegeben ist die Matrix

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

a) Fassen Sie (2) als Tableau eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ auf, das für die eine rechte Seite b gelöst wurde, und beantworten Sie die folgenden Fragen:

   - Weist das Tableau (2) Zeilenstufenform `ref` oder gar reduzierte Zeilenstufenform `rref` auf? Geben Sie die jeweiligen Formen an.
   - Wie gross ist der Rang der entsprechenden System-Matrix A? Geben Sie zudem m = Anzahl Gleichungen und n = Anzahl Unbekannte an.
   - Geben Sie, falls möglich, die Lösungsmenge an.

b) Fassen Sie nun (2) als Tableau zweier linearer Gleichungssysteme $Ax = b_k$ mit zwei rechten Seiten b_1 und b_2 auf. Diese beiden Gleichungssysteme wurden simultan gelöst. Beantworten Sie die gleichen Fragen wie unter a).

MLAN1 Lösungen zweiter Test 25.11.08

Lösung 1

a) Ebene E parallel zur $xz-$ Ebene durch C: $y = 7$, $P = g \cap E \Longrightarrow h\colon \vec{r} = \overrightarrow{0C} + \mu\overrightarrow{CP}$

$$g\colon \vec{r} = \overrightarrow{0A} + \mu\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow P(14, 7, -18)$$ und damit

$$h\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R}.$$

b) $P_1 = h\cap$ Grundriss: $z = 0 \Longrightarrow P_1\left(-\frac{10}{7}, 7, 0\right)$

$P_2 = h\cap$ Aufriss: $x = 0 \Longrightarrow P_2\left(0, 7, -\frac{5}{3}\right)$

Lösung 2

a) Tableau nach einem Schritt:

x_1	x_2	x_3	1
1	1	$-p$	2
.	-1	p	-4
.	$1-p$	$-1+p^2$	$q-2p$

Ein zweites Pivot kann immer gewählt werden, da -1 in der zweiten Zeile unabhängig von p und q, d.h. zwei freie Parameter in der Lösung ist nicht möglich.

b) Tableau nach zwei Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
1	1	$-p$	2
.	1	$-p$	4
.	.	$-1+p$	$q+2p-4$

$p = 1$ und $q = 2$:

x_1	x_2	x_3	1
1	1	-1	2
.	1	-1	4
.	.	.	.

$$x = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R}.$$

c) $p \neq 1$

d) $p = 1$ und $q \neq 2$, VB verletzt.

Lösung 3

(2) weist weder `ref` noch `rref` auf.

a)

- `ref`

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1
1	1	3	-1	1	-1
.	-1	-5	-1	2	0
.	.	2	0	1	0
.	.	.	.	1	1

`rref`

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1
1	0	0	-2	0	-5
.	1	0	1	0	$\frac{9}{2}$
.	.	1	0	0	$-\frac{1}{2}$
.	.	.	.	1	1

- $r = 4$, sowie $m = 4$ und $n = 5$
- $x_4 = \mu \in \mathbb{R}$: Lösung: $x = \begin{pmatrix} -5 \\ \frac{9}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$.

b)

1. `rref`

x_1	x_2	x_3	x_4	1	1
1	0	0	-1	0	-5
.	1	0	1	0	$\frac{9}{2}$
.	.	1	0	0	$-\frac{1}{2}$
.	.	.	.	1	1

2. $r = 3$, $m = 4$ und $n = 4$
3. für die beide rechten Seite haben wir einen Widerspruch, also keine Lösung.