
Name:

Bewertung: Alle Aufgaben haben das gleiche Gewicht.

Aufgabe 1

Gegeben sind die Matrizen

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; U = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fassen Sie diese Matrizen als Tableaux von linearen Gleichungssystemen der Form $Ax = b$ mit der Koeffizientenmatrix A und jeweils einem Spaltenvektor b auf, und beantworten Sie folgende Fragen:

a) Welche Tableaux weisen Zeilenstufenform auf?

b) Welche Tableaux weisen reduzierte Zeilenstufenform auf?

c) Wie gross ist für das Tableau V der Rang der zugehörigen Koeffizientenmatrizen A?

d) Wie lautet die Lösungsmenge des zu U gehörigen Gleichungssystems?

Aufgabe 2

Gegeben sind die beiden Geraden

$$g\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad h\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Geraden g und h windschief zueinander sind.

b) Bestimmen Sie den Abstand zwischen g und h.

c) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, die g enthält und parallel zur z-Achse ist.

Aufgabe 3

a) Gegeben sind die drei Ebenen

$$\begin{array}{lrcrcrcl} E_1: & 2x & + & 8y & + & az & = & 2, \\ E_2: & x & + & 3y & + & z & = & 1, \\ E_3: & -x & + & (a-5)y & + & (1-a)z & = & 0. \end{array}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe einer geeigneten Determinante diejenigen Werte $a \in \mathbb{R}$, für die sich die drei Ebenen in genau einem Punkt schneiden.

b) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 & 0 \\ y^2 & -4y & -1 & -1 \\ z^2 & -2z & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Gleichung $\det(A) = 5$ eine Kugel K im Raum beschreibt, und bestimmen Sie den Mittelpunkt M und den Radius r von K.

Aufgabe 4

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} a & a & -1 \\ a-1 & a^2-3 & a^2-2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-3 \\ 2a-2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem

a) Genau eine Lösung?

b) Keine Lösung?

c) Unendlich viele Lösungen?

d) Geben Sie für den Fall c) die Lösungsmenge an.

Aufgabe 5

a) Schreiben Sie die Summe

$$s_a = \frac{1}{2} \cdot x^{-1} - \frac{2}{3} \cdot x + \frac{4}{5} \cdot x^3 - \frac{8}{9} \cdot x^5 + \frac{16}{17} \cdot x^7 \mp \dots$$

mit 10 Summanden mit Hilfe des Summenzeichens in der Form $s_a = \sum_{k=0}^{\dots} \dots$

Wie lautet der letzte Summand? (inkl. Vorzeichen)

b) Gegegeben sind Gleichungen

$$\sum_{i=0}^{9} (5x_{i+1} - 1) = 0 \qquad \text{und} \qquad \sum_{j=1}^{10} (3x_j - 1)^2 = 7.$$

Bestimmen Sie damit die Summe

$$s_b = \sum_{k=1}^{10} \left\{ x_k - \sum_{j=1}^{10} (x_j - 1)^2 \right\}.$$

Aufgabe 6

Gegeben sind die Punkte $A(-8, 11, 11)$, $B(0, 11, 11)$, $P(-10, 0, 17)$ und $Q(8, 18, -1)$.

Von einem Quader ist eine Kante durch AB gegeben.
Von den anderen von A ausgehenden Kanten AD und AE weiss man, dass D auf der Geraden $g = g(P, Q)$ und E auf der Ebene mit der Koordinatengleichung $x + z = 12$ liegt.
Gesucht ist das Volumen des Quaders.

MLAN1 Lösungen Schlussprüfung 13.01.09

Lösung 1

a) Nur die Tableaux T und U weisen `ref` auf.

b) Nur das Tableau U weist `rref` auf.

c) Rang$(A) = 2$

d) Die Lösungsmenge des zu U gehörigen Gleichungssystems lautet

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lösung 2

a) Die Geraden g und h sind windschief genau dann, wenn deren Richtungsvektoren linear unabhängig sind und $g \cap h = \emptyset$ gilt. Die erste Bedingung ist offensichtlich erfüllt. Für die zweite Bedingung müssen die Parameterdarstellungen von g und h einander gleichgesetzt werden. Daraus resultiert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Aus der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$(A, b) = \begin{array}{|cc|c|} \hline \lambda & \mu & 1 \\ \hline 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ \hline \end{array} \quad \text{folgt} \quad \begin{array}{|cc|c|} \hline \lambda & \mu & 1 \\ \hline 1 & -1 & 2 \\ . & -2 & 3 \\ . & . & -2 \\ \hline \end{array} \quad \text{vorzeitiger Abbruch mit Widerspruch,}$$

d.h. das Gleichungssystem weist tatsächlich keine Lösung auf.

b) Es sei t die Transversale, die g und h in den Punkten P bzw. Q jeweils rechtwinklig schneidet. Aus den Parameterdarstellungen von g und h findet man

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Orthogonalität von $\overrightarrow{PQ}$ zu g und h liefert die beiden Gleichungen

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{und} \qquad \overrightarrow{PQ} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Daraus ergeben sich die Werte

$$\lambda = \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad \mu = -\frac{3}{2}.$$

Somit gilt also

$$\left| \overrightarrow{PQ} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = 2.$$

c) Durch entsprechende Erweiterung der Parameterdarstellung von g erhält man eine solche der gesuchten Ebene E:

$$E\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mu, \nu \in \mathbb{R}.$$

Daraus gewinnt man durch Elimination der Parameter die Koordinatengleichung

$$E: \quad x + y = -3.$$

Lösung 3

a) Das Gleichungssystem, das die Schnittmenge $E_1 \cap E_2 \cap E_3$ beschreibt, lautet

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & a \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & a-5 & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das Gleichungssystem hat eine eindeutige Lösung genau dann, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix von Null verscheiden ist. Man findet

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 8 & a \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & a-5 & 1-a \end{pmatrix} = a\,(a-2).$$

Die drei Ebenen schneiden sich also genau dann in genau einem Punkt, wenn $a \neq 0$ und $a \neq 2$ gilt.

b) Beispielsweise durch Entwickeln nach der ersten Zeile findet man

$$\det(A) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2x - 4y - 2z.$$

Durch quadratische Ergänzungen erhält man damit die Kugelgleichung

$$(x + \frac{1}{2})^2 + (y-1)^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = 4.$$

Daraus ist abzulesen:

$$M = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}) \qquad \text{und} \qquad r = 2.$$

Lösung 4

Mit Hilfe des Gauss-Algorithmus erhält man das Endschema

x_1	x_2	x_3	1
1	1	a	2
.	a^2-a-2	$a-2$	0
.	.	$1+a^2$	$a+3$

a) Der Fall $a \neq 2$ und $a \neq -1$ ist äquivalent zu Rang$(A) = 3$ und dies wiederum ist äquivalent zur Eindeutigkeit der Lösung des Gleichungssystems.

b) Der Fall $a = -1$ bedeutet

x_1	x_2	x_3	1
1	1	a	2
.	0	1	0
.	.	.	2

d.h. vorzeitiger Abbruch mit Widerspruch, also keine Lösung.

c) Der Fall $a = 2$ bedeutet

x_1	x_2	x_3	1
1	1	a	2
.	0	1	1
.	.	.	.

d.h. vorzeitiger Abbruch ohne Widerspruch, also $\infty-$ viele Lösungen mit einem freien Parameter ($x_2 = \mu \in \mathbb{R}$).

d) Die Lösungsmenge im Fall c) lautet

$$\mathbb{L} = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ;\ \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lösung 5

a) Die Summe lautet

$$s_a = \sum_{k=0}^{9} (-1)^k \, \frac{2^k}{2^k+1} \, x^{2k-1}.$$

mit dem letzten Summanden $-\frac{512}{513} \cdot x^{17}$

b) Aus den Gleichungen

$$\sum_{i=0}^{9} (5x_{i+1} - 1) = \sum_{i=1}^{10} (5x_i - 1) = 0 \qquad \text{und} \qquad \sum_{j=1}^{10} (3x_j - 1)^2 = 7.$$

erhält man schrittweise die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = \sum_{j=1}^{10} x_j = 2 \qquad \text{und} \qquad \sum_{j=1}^{10} x_j^2 = 1.$$

Eingesetzt in den Ausdruck für die Summe s_b ergibt sich damit schliesslich

$$s_b = -68.$$

Lösung 6

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

D muss auf der Geraden $g\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ liegen, d.h. $D(-10+\mu, \mu, 17-\mu)$.

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Longrightarrow \mu = 2$ und damit $D(-8, 2, 15)$ mit $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ und $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{AE} = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{9} \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Kante AE liegt auf einer Geraden $l \perp AB$ und $l \perp AD$ durch A.

$l\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{9} \\ 1 \end{pmatrix}$ Ecke $E = l \cap$ Ebene $x + z = 12$ und somit $E(-8, 15, 20)$ mit $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Volumen des Quaders: $V = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AE}| = 8 \cdot \sqrt{52}\sqrt{52} = 416.$

Lösung 7

$x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 + z\vec{a}_3 \stackrel{!}{=} 0$

a) Mit dem Gauss-Algorithmus: Endschema:

x	y	z	1
2	3	1	0
.	2	4	0
.	.	3	0

d.h. der Rang $r = 3$, d.h. die drei Vektoren sind linear unabhängig.

b)

$$\vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung 8

a) $F \in g$, d.h. $F(-3+\mu, -3+7\mu, 1+3\mu)$ und damit $\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} -5+\mu \\ -6+7\mu \\ -4+3\mu \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a} \cdot \overrightarrow{FA} = 0 \Longrightarrow \mu = 1$

und damit Also g' : $\vec{r} = \overrightarrow{0A} + \mu\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$.

b) mit $\mu = 1$: $F(-2, 4, 4)$.

c) $\overrightarrow{0A'} = \overrightarrow{0A} + 2\overrightarrow{AF} \Longrightarrow A'(-6, 5, 3)$.

Lösung 9

a) Index – Shift:

$\sum\limits_{j=-1}^{14} x_{j+2} = \sum\limits_{j=1}^{16} x_j = 12$ und $\sum\limits_{k=3}^{18} x_{k-2}^2 = \sum\limits_{k=1}^{16} x_k^2 = 20$

$s_a = \sum\limits_{i=1}^{16} \left\{ 2x_i - \sum\limits_{l=1}^{16} (x_l - 2)^2 \right\}$

$\sum\limits_{l=1}^{16} (x_l - 2)^2 = \sum\limits_{l=1}^{16} x_l^2 - 4 \sum\limits_{l=1}^{16} x_l + 4 \cdot 16 = 36$

und damit $s_a = 2 \cdot 12 - 16 \cdot 36 = 24 - 24^2 = 24 \cdot (-23) = -552$

b) $s_b = \sum\limits_{k=1}^{11} (-1)^{k+1} \left(\frac{2k-1}{2^{k-1}} \right) \cdot x^k$

Lösung 10

a) U ist weder in `ref` noch in `rref`, da 4 oberhalb der führenden 1 in der $4-$ ten Spalte.
$3-$ te und $4-$ te Zeile müssen vertauscht werden.
`rref` von U:

x_1	x_2	x_3	x_4	1
1	3	0	0	2
.	.	1	0	0
.	.	.	1	0
.	.	.	.	6

V ist bereits in `rref`

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	1
1	0	0	4	0	0	1
.	1	0	0	0	0	0
.	.	1	0	0	0	0
.	.	.	.	.	1	0

b) Für U: System – Matrix hat Rang $r = 3$ und für V: System – Matrix hat Rang $r = 4$.

c) Lösungsmenge für U ist leer, da in der letzten Zeile ein Widerspruch $0 = 6$ steht.
Lösungsmenge für V: $n = 6$ und $r = 4$, d.h. zwei freie Parameter, $x_4 = \mu \in \mathbb{R}$ und $x_5 = \nu \in \mathbb{R}$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mu, \nu \in \mathbb{R}.$$

Lösung 11

a) $\det(A) = (-1) \cdot (2a - a^2) \overset{!}{=} 0 \iff a_1 = 0$ oder $a_2 = 2$.

b) $B = PA$, wobei $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, zwei Zeilenvertauschungen.
$\det(B) = \det(P \cdot A) = \det(P) \cdot \det(A) = 1 \cdot \det(A) = \det(A) = -6$.

Lösung 12

Gauss-Algorithmus

Schema nach einem Schritt:

x_1	x_2	x_3	1
1	a	2	1
.	$4 - a^2$	$5 - 2a$	0
.	.	$(a^2 + 4)$	$2 - a$

a) kein vorzeitiger Abbruch: $a^2 - 4 \neq 0 \iff a \neq \pm 2$.

b) vorzeitiger Abbruch mit Widerspruch, d.h. $a = 2$ oder $a = -2$

$a = -2$:

x_1	x_2	x_3	1
1	-2	2	1
.	0	9	0
.	.	8	4

$\Longrightarrow$

x_1	x_2	x_3	1
1	-2	2	1
.	0	1	0
.	.	0	4

D.h. die letzte Zeile ist ein Widerspruch.

c) vorzeitiger Abbruch ohne Widerspruch, d.h. $a = 2$ oder $a = -2$

$a = 2$:

x_1	x_2	x_3	1
1	2	2	1
.	0	1	0
.	.	8	0

$\Longrightarrow$

x_1	x_2	x_3	1
1	2	2	1
.	0	1	0
.	.	0	0

D.h. $\infty-$ viele Lösungen mit einem freien Parameter: $x_2 = \mu \in \mathbb{R}$.

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Weitere Aufgaben

Aufgabe 7

a) Gegeben ist die Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

   i) Bestimmen Sie $B^2 - 3B + 2I_3$.

   ii) Bestimmen Sie die Inverse von B mit Hilfe von i).

b) Gegeben ist $(5C^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. Gesucht ist die Matrix C.

Aufgabe 8 *mit Hilfe der Determinante?*

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ cx_1 & + & 4x_2 & + & cx_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & cx_2 & + & 6x_3 & = & 4 \end{array} \right.$$

a) Für welche Werte von $c \in \mathbb{R}$ hat die Lösungsmenge zwei freie Parameter?

b) Für welche Werte von $c \in \mathbb{R}$ hat die Lösungsmenge einen freien Parameter?

c) Wann gibt es genau eine Lösung?

d) Wann gibt es keine Lösung?

Geben Sie im Fall b) die Lösungen an; geometrische Interpretation.

Aufgabe 9

a) Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Ebene E_1, welche die Punkte $A(3, 2, -3)$ und $B(3, -2, 5)$ enthält und parallel zur Geraden $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist.

b) Berechnen Sie das Volumen des Tetraeders, das von den Ebenen E_1, π_2, π_3 und $E_2: z+3 = 0$ begrenzt wird.

Aufgabe 10

Gegeben seien die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad d = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ d_3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie d_3 so, dass diese Vektoren linear abhängig werden.

Aufgabe 11

Seien $L =$ eine untere $n \times n-$ Dreiecksmatrix, d.h. $l_{ij} = 0$, falls $i < j$ und
$R =$ eine obere $n \times n-$ Dreiecksmatrix, d.h. $r_{ij} = 0$, falls $i > j$.

a) Was ensteht bei der Multiplikation $L \cdot R$, wieviele Elemente sind von Null verschieden?

b) Bestimmen Sie den Rechenaufwand (= Anzahl Multiplikationen) bei der Multiplikation in a)

Aufgabe 12 *neu*

Gegeben ist

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie

$$s_1 = \sum_{k=1}^{4} \left(\sum_{l=1}^{3} a_{kl} \right) \qquad \text{und} \qquad s_2 = \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{j+1} a_{ij} \right)$$

Aufgabe 13 *neu*

Gegeben sind die Ebenen $4x - 2y - z - 12 = 0$ und $2x + 2y - 5z + 24 = 0$.
Welcher Punkt der Schnittgeraden liegt dem Ursprung am nächsten?
Wie gross ist sein Abstand vom Ursprung?

Aufgabe 14 *neu*

Gegeben sind die beiden Geraden

$$g\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu \in \mathbb{R} \qquad h\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \nu \in \mathbb{R}$$

a) Zeigen Sie, dass g und h windschief sind.

b) Bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden.

Aufgabe 15 *neu*

Von einem Quader ist die Kante AB gegeben.
Von den andern von A ausgehenden Kanten AD und AE weiss man, dass D auf der Geraden $g = g(P, Q)$ und E auf der Ebene mit der Koordinatengleichung $x + z = 12$ liegt.
Gesucht ist das Volumen des Quaders.
schönere Zahlen: $A(-8, 11, 11)$, $B(0, 11, 11)$, $P(-10, 0, 17)$ und $Q(8, 18, -1)$.

Lösung 13

a) i) $B^2 - 3B + 2I_3 = 0$

ii) $B^{-1} = \frac{1}{2}\,(3I_3 - B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

b) $(5\,C^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} =: B^{-1}$ und damit $5\,C^T = B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$,

also $C = \frac{1}{5}\,B^T = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Lösung 14

Gauss-Algorithmus

Schema nach einem Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	$4 - \frac{c^2}{2}$	$-2c$	$1 - 2c$

Schema nach zwei Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	.	$8 - 2c - c^2$	$7 - 2c - \frac{3}{4}\,c^2$

a) zwei freie Parameter sind *nicht* möglich, da zwei Pivots immer möglich sind, unabhängig von c ($r = 2$).

b) Abbruch nach zwei Schritten: $8 - 2c - c^2 = 0 \iff c = -4$ oder $c = 2$.
Damit es Lösungen gibt, muss die VB erfüllt sein: $7 - 2c - \frac{3}{4}\,c^2 = 0 \iff c = -\frac{14}{3}$ oder $c = 2$.
Also: ein freier Parameter genau dann, wenn $c = 2$: $x = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
geometrisch: drei Ebenen, die sich in einer Geraden schneiden.

c) genau eine Lösung: $c \neq -4$ und $c \neq 2$

d) keine Lösung: $c = -4$, VB nicht erfüllt.

Lösung 15

a) $g:\ \vec{r} = \overrightarrow{0P_0} + \mu\vec{a}$

$E_1:\ \vec{r} = \overrightarrow{0A} + \alpha\vec{a} + \beta\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und damit

$E_1:\ 4x + 6y + 3z = 15$

b) $V = \frac{h}{3}\,G$: Schnittpunkte der Ebene E_1 mit den Koordinatenachsen und $z = -3$ liefert die Punkte $(0,0,-3)$, $(0,0,5)$, $(6,0,-3)$, $(0,4,-3)$ und somit $h = 8$ und $G = 12$ woraus $V = 32$ resultiert.

Lösung 16

Gauss-Algorithmus, Endschema:

0	0	1	-1	-2	1
1	0	0	-1	-5	6
0	1	0	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{27}{5}$

a)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{27}{5} \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) erster Schritt: $Lc = Pb$, wobei $Pb = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 54 \end{pmatrix} \Longrightarrow c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 54 \end{pmatrix}$

zweiter Schritt: $Rc = x \Longrightarrow x = \begin{pmatrix} -14 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix}$