
Name:

Bewertung: Alle Aufgaben haben das gleiche Gewicht.

Aufgabe 1

Gegeben sind die Matrizen

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ U = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fassen Sie diese Matrizen als Tableaux von linearen Gleichungssystemen der Form $Ax = b$ mit der Koeffizientenmatrix A und jeweils einem Spaltenvektor b auf, und beantworten Sie folgende Fragen:

a) Welche Tableaux weisen Zeilenstufenform auf?

b) Welche Tableaux weisen reduzierte Zeilenstufenform auf?

c) Wie gross ist für das Tableau V der Rang der zugehörigen Koeffizientenmatrix A?

d) Wie lautet die Lösungsmenge des zu U gehörigen Gleichungssystems?

Aufgabe 2

Gegeben sind die beiden Geraden

$$g\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad h\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Geraden g und h windschief zueinander sind.

b) Bestimmen Sie den Abstand zwischen g und h.

c) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, die g enthält und parallel zur z-Achse ist.

Aufgabe 3

a) Gegeben sind die drei Ebenen

$$\begin{array}{lrcrcrcl} E_1: & 2x & + & 8y & + & az & = & 2, \\ E_2: & x & + & 3y & + & z & = & 1, \\ E_3: & -x & + & (a-5)y & + & (1-a)z & = & 0. \end{array}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe einer geeigneten Determinante diejenigen Werte $a \in \mathbb{R}$, für die sich die drei Ebenen in genau einem Punkt schneiden.

b) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 & 0 \\ y^2 & -4y & -1 & -1 \\ z^2 & -2z & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Gleichung $\det(A) = 5$ eine Kugel K im Raum beschreibt, und bestimmen Sie den Mittelpunkt M und den Radius r von K.

Aufgabe 4

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} a & a & -1 \\ a-1 & a^2-3 & a^2-2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-3 \\ 2a-2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem

a) Genau eine Lösung?

b) Keine Lösung?

c) Unendlich viele Lösungen?

d) Geben Sie für den Fall c) die Lösungsmenge an.

Aufgabe 5

a) Schreiben Sie die Summe

$$s_a = \frac{1}{2} \cdot x^{-1} - \frac{2}{3} \cdot x + \frac{4}{5} \cdot x^3 - \frac{8}{9} \cdot x^5 + \frac{16}{17} \cdot x^7 \mp \ldots$$

mit 10 Summanden mit Hilfe des Summenzeichens in der Form $s_a = \sum\limits_{k=0}^{\cdots} \ldots$

Wie lautet der letzte Summand? (inkl. Vorzeichen)

b) Gegegeben sind die Gleichungen

$$\sum_{i=0}^{9} (5x_{i+1} - 1) = 0 \qquad \text{und} \qquad \sum_{j=1}^{10} (3x_j - 1)^2 = 7.$$

Bestimmen Sie damit die Summe

$$s_b = \sum_{k=1}^{10} \left\{ x_k - \sum_{j=1}^{10} (x_j - 1)^2 \right\}.$$

Aufgabe 6

Gegeben sind die Punkte $A(-8, 11, 11)$, $B(0, 11, 11)$, $P(-10, 0, 17)$ und $Q(8, 18, -1)$.

Von einem Quader ist eine Kante durch AB gegeben.
Von den anderen von A ausgehenden Kanten AD und AE weiss man, dass D auf der Geraden $g = g(P, Q)$ und E auf der Ebene mit der Koordinatengleichung $x + z = 12$ liegt.
Gesucht ist das Volumen des Quaders.

MLAN1 Lösungen Schlussprüfung 13.01.09

Lösung 1

a) Nur die Tableaux T und U weisen `ref` auf.

b) Nur das Tableau U weist `rref` auf.

c) Rang$(A) = 2$

d) Die Lösungsmenge des zu U gehörigen Gleichungssystems lautet

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lösung 2

a) Die Geraden g und h sind windschief genau dann, wenn deren Richtungsvektoren linear unabhängig sind und $g \cap h = \emptyset$ gilt. Die erste Bedingung ist offensichtlich erfüllt. Für die zweite Bedingung müssen die Parameterdarstellungen von g und h einander gleichgesetzt werden. Daraus resultiert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Aus der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$(A, b) = \begin{array}{|cc|c|} \hline \lambda & \mu & 1 \\ \hline 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ \hline \end{array} \quad \text{folgt} \quad \begin{array}{|cc|c|} \hline \lambda & \mu & 1 \\ \hline 1 & \text{-1} & 2 \\ . & \text{-2} & 3 \\ . & . & \text{-2} \\ \hline \end{array} \quad \text{vorzeitiger Abbruch mit Widerspruch,}$$

d.h. das Gleichungssystem weist tatsächlich keine Lösung auf.

b) Es sei t die Transversale, die g und h in den Punkten P bzw. Q jeweils rechtwinklig schneidet. Aus den Parameterdarstellungen von g und h findet man

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Orthogonalität von $\overrightarrow{PQ}$ zu g und h liefert die beiden Gleichungen

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{und} \qquad \overrightarrow{PQ} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Daraus ergeben sich die Werte

$$\lambda = \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad \mu = -\frac{3}{2}.$$

Somit gilt also

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = 2.$$

c) Durch entsprechende Erweiterung der Parameterdarstellung von g erhält man eine solche der gesuchten Ebene E:

$$E\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mu, \nu \in \mathbb{R}.$$

Daraus gewinnt man durch Elimination der Parameter die Koordinatengleichung

$$E: \quad x + y = -3.$$

Lösung 3

a) Das Gleichungssystem, das die Schnittmenge $E_1 \cap E_2 \cap E_3$ beschreibt, lautet

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & a \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & a-5 & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das Gleichungssystem hat eine eindeutige Lösung genau dann, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix von Null verscheiden ist. Man findet

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 8 & a \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & a-5 & 1-a \end{pmatrix} = a\,(a-2).$$

Die drei Ebenen schneiden sich also genau dann in genau einem Punkt, wenn $a \neq 0$ und $a \neq 2$ gilt.

b) Beispielsweise durch Entwickeln nach der ersten Zeile findet man

$$\det(A) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2x - 4y - 2z.$$

Durch quadratische Ergänzungen erhält man damit die Kugelgleichung

$$(x + \frac{1}{2})^2 + (y-1)^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = 4.$$

Daraus ist abzulesen:

$$M = (-\frac{1}{2},\, 1,\, \frac{1}{2}) \qquad \text{und} \qquad r = 2.$$

Lösung 4

Mit Hilfe des Gauss-Algorithmus erhält man das Endschema

x_1	x_2	x_3	1
1	1	a	2
.	a^2-a-2	$a-2$	0
.	.	$1+a^2$	$a+3$

a) Der Fall $a \neq 2$ und $a \neq -1$ ist äquivalent zu Rang$(A) = 3$ und dies wiederum ist äquivalent zur Eindeutigkeit der Lösung des Gleichungssystems.

b) Der Fall $a = -1$ bedeutet

x_1	x_2	x_3	1
1	1	a	2
.	0	1	0
.	.	.	2

d.h. vorzeitiger Abbruch mit Widerspruch, also keine Lösung.

c) Der Fall $a = 2$ bedeutet

x_1	x_2	x_3	1
1	1	a	2
.	0	1	1
.	.	.	.

d.h. vorzeitiger Abbruch ohne Widerspruch, also $\infty-$ viele Lösungen mit einem freien Parameter
$(x_2 = \mu \in \mathbb{R})$.

d) Die Lösungsmenge im Fall c) lautet

$$\mathbb{L} = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ;\ \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lösung 5

a) Die Summe lautet

$$s_a = \sum_{k=0}^{9} (-1)^k \, \frac{2^k}{2^k+1} \, x^{2k-1}.$$

mit dem letzten Summanden $-\frac{512}{513} \cdot x^{17}$.

b) Aus den Gleichungen

$$\sum_{i=0}^{9}(5x_{i+1}-1) = \sum_{i=1}^{10}(5x_i - 1) = 0 \qquad \text{und} \qquad \sum_{j=1}^{10}(3x_j-1)^2 = 7.$$

erhält man schrittweise die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = \sum_{j=1}^{10} x_j = 2 \qquad \text{und} \qquad \sum_{j=1}^{10} x_j^2 = 1.$$

Eingesetzt in den Ausdruck für die Summe s_b ergibt sich damit schliesslich

$$s_b = -68.$$

Lösung 6

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

D muss auf der Geraden $g\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ liegen, d.h. $D(-10+\mu, \mu, 17-\mu)$.

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Longrightarrow \mu = 2$ und damit $D(-8, 2, 15)$ mit $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Die Kante AE liegt auf einer Geraden $l \perp AB$ und $l \perp AD$ durch A:

$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ und $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{AE} = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{9} \\ 1 \end{pmatrix}$

$l\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{9} \\ 1 \end{pmatrix}$ Ecke $E = l \cap$ Ebene $x + z = 12$ und somit $E(-8, 15, 20)$ mit $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Volumen des Quaders: $V = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AE}| = 8 \cdot \sqrt{97}\sqrt{97} = 776.$