Klasse WI08c **MLAN1 - zweiter Test** 24. November 2008

Name:

Aufgabe 1

Gegeben ist die Matrix

$$W = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

a) Fassen Sie (1) als Tableau eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ auf, das für die eine rechte Seite b gelöst wurde, und beantworten Sie die folgenden Fragen:

- Weist das Tableau (1) Zeilenstufenform `ref` oder gar reduzierte Zeilenstufenform `rref` auf? Geben Sie die jeweiligen Formen an.
- Wie gross ist der Rang der entsprechenden System-Matrix A? Geben Sie zudem m = Anzahl Gleichungen und n = Anzahl Unbekannte an.
- Geben Sie, falls möglich, die Lösungsmenge an.

b) Fassen Sie nun (1) als Tableau zweier linearer Gleichungssysteme $Ax = b_k$ mit zwei rechten Seiten b_1 und b_2 auf. Diese beiden Gleichungssysteme wurden simultan gelöst. Beantworten Sie die gleichen Fragen wie unter a).

Aufgabe 2

a) Von einem ebenen Viereck $ABCD$ sind die Ecken $A(6, 4, 6)$, $B(-2, 2, 2)$ und $C(4, -1, 2)$ gegeben. Bestimmen Sie die fehlende Koordinate x_D von $D(x_D, 1, 5)$.

b) Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Ebene E_2 durch die Gerade $g = g(A, B)$, die auf dem Grundriss senkrecht steht und geben Sie eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden von E_2 mit dem Grundriss an.

Aufgabe 3

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem

$$Ax = b \tag{2}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2\beta & 4 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2\beta & 3\alpha \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

a) Wann hat (2) Lösungen mit 2 freien Parametern?

b) Wann hat (2) $\infty-$ viele Lösungen mit einem freien Parameter?

c) Wann ist (2) eindeutig lösbar?

d) Wann hat (2) keine Lösung?

Geben Sie in den Fällen a) und b) die Lösungen an.

MLAN1 Lösungen zweiter Test 24.11.08

Lösung 1

(1) weist weder `ref` noch `rref` auf.

a) • `ref`

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1
2	1	0	0	0	0
.	-2	0	0	0	1
.	.	2	-1	0	1
.	.	.	1	0	1
.	.	.	.	2	0

`rref`

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1
1	0	0	0	0	$-\frac{1}{4}$
.	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$
.	.	1	0	0	1
.	.	.	1	0	1
.	.	.	.	1	0

- $r = 5$, sowie $m = n = 5$
- Lösung: $x^T = \left(-\frac{1}{4},\, \frac{1}{2},\, 1,\, 1,\, 0\right)$

b) • `rref`

x_1	x_2	x_3	x_4	1	1
1	0	0	0	0	$-\frac{1}{4}$
.	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$
.	.	1	0	0	1
.	.	.	1	0	1
.	.	.	.	1	0

- $r = 4$, $m = 5$ und $n = 4$
- für die erste rechte Seite haben wir einen Widerspruch, also keine Lösung
  für die zweite rechte Seite haben wir die Lösung $x^T = \left(-\frac{1}{4},\, \frac{1}{2},\, 1,\, 1\right)$

Lösung 2

a) $E_1 = E_1(A,B,C) : D \in E_1 \iff E_1\colon \vec{r} = \overrightarrow{0A} + \mu\overrightarrow{AB} + \nu\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0D}$

$$\begin{cases} x_D &= 6 \quad -4\mu \quad -2\nu \\ 1 &= 4 \quad -\mu \quad -5\nu \\ 5 &= 6 \quad -2\mu \quad -4\nu \end{cases}$$

Aus den letzten beiden Gleichungen erhalten wir $\nu = \frac{5}{6}$ und $\mu = -\frac{7}{6}$, also $x_D = 9$.

b) $E_2\colon \vec{r} = \overrightarrow{0A} + \mu\overrightarrow{AB} + \nu\vec{e}_3 \Longrightarrow E_2\colon x - 4y = -10$

x	y	z	1
1	-4	0	-10
.	.	1	0

$s_1 = E_2 \cap$ Grundriss : $\vec{r} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Lösung 3

a) Tableau nach einem Schritt:

x_1	x_2	x_3	1
3	2β	4	5
.	-2β	0	0
.	2β	3α	β

$\infty-$ viele Lösungen mit zwei freien Parametern: $\alpha = \beta = 0$:

$$x = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mu, \nu \in \mathbb{R}.$$

b) $\beta = 0$ und $\alpha \neq 0$: Tableau nach zwei Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
3	0	4	5
.	.	1	0
.	.	.	.

$\infty-$ viele lösungen mit einem freien Parameter: $x = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R}.$

c) $\beta \neq 0$ und $\alpha \neq 0$

d) $\beta \neq 0$ und $\alpha = 0$

x_1	x_2	x_3	1
3	2β	4	5
.	1	0	0
.	0	0	$\frac{1}{2}$