Klassen SI07a, UI07bc **MNM – Schlussprüfung** 10. Juni 2009

Name:

Bewertung: Alle Aufgaben haben dasselbe Gewicht.

Aufgabe 1

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b \tag{1}$$

mit $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 3 & 10 & 6 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie mit der *relativen Kolonnen Maximumstrategie* die $LR-$ Zerlegung von A, d.h. $LR = PA$.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Zerlegung aus a) die Lösung von (1).

Aufgabe 2

$$H(q) = \sqrt{q^2 - 1} - \sqrt{q^2 - 1000} \qquad q > 10\sqrt{10}. \tag{2}$$

Falls $q \longrightarrow \infty$, so entsteht bei der numerischen Bestimmung von (2) Auslöschung.

a) Bestimmen Sie für diesen Grenzfall die Kondition von (2), d.h. $\lim\limits_{q \to \infty} \kappa_H(q)$.

b) Können Sie die Auslöschung in (2) vermeiden? (*mit* Begründung)
Wenn ja, wie?

Aufgabe 3

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 + 10^{-8} \end{pmatrix}$ und der rechten Seite $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die exakte Lösung ist $x_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Kondition $\kappa(A)$ von A in der $\|\ldots\|_\infty -$ Norm.

b) Betrachten Sie nun für kleine positive ε die folgenden rechten Seiten:

b1) $\hat{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \varepsilon \end{pmatrix}$ b2) $\hat{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix}$

und berechnen Sie die entsprechenden Lösungen $\hat{x}_1$ und $\hat{x}_2$.

c) Bestimmen Sie für $\hat{x}_1$ und $\hat{x}_2$ die relativen Fehler $\|\delta\hat{x}_1\|_\infty$ und $\|\delta\hat{x}_2\|_\infty$.
Vergleich mit der theoretisch hergeleiteten Abschätzung, was stellen Sie fest?

bitte wenden

Aufgabe 4

Wir betrachten die Gleichung

$$x^2 + 1 = x + \sqrt{x}$$

mit der Lösung $x_1 = 1$.
Diese Lösung soll mit einer Fixpunktiteration numerisch bestimmt werden. Dazu wurden folgende Vorschläge gemacht:

$$\text{i) } x_{n+1} = x_n^2 - \sqrt{x_n} + 1 \qquad \text{ii) } x_{n+1} = \sqrt{x_n + \sqrt{x_n} - 1} \qquad \text{iii) } x_{n+1} = \left(x_n^2 + 1 - x_n\right)^2$$

a) Welche der vorgeschlagenen Varianten ist konvergent? (*mit* Begründung)

b) Vergleichen Sie die konvergente(n) Variante(n) mit der Bisektion.
   - Dabei wird für die Fixpunktiteration $x_0 = 4$ als Startwert verwendet und für die Bisektion wird das Startintervall $[a,\, b] = [0.5,\, 1.5]$ gewählt.
   - Im Resultat sollen $3-$ Dezimalen nach dem Komma korrekt gerundet sein, $\varepsilon = ?$
   - Welches der Verfahren ist schneller?
     (*mit* Begründung, inkl. Angabe der Anzahl dazu notwendigen Wiederholungen)

Aufgabe 5

Gegeben ist die Gleichung

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \tag{3}$$

a) Bestimmen Sie die Lösungen von (3).

b) (3) wird nun mit der gewöhnlichen Iteration numerisch gelöst. Dabei soll die betragsmässig kleinere Nullstelle s_1 von (3) ein attraktiver Fixpunkt der Iteration sein. Startwert $x_0 = 2$.
   Berechnen Sie ausgehend von $x_0 = 2$ die Werte x_1, x_2 und bestimmen Sie $q \approx |F'(x_2)|$.
   Wie gross ist q wirklich?

c) Berechnen Sie zusätzlich x_3 sowie die Werte x_0' und x_1' nach dem *Aitken'schen* Δ^2- Verfahren.
   Bestimmen Sie damit den Näherungswert

$$q_{\text{Aitken}} \approx \left| \frac{x_1' - s_1}{x_0' - s_1} \right| .$$

Aufgabe 6

Betrachten Sie die Quadraturformel

$$Q = \sum_{k=0}^{n} w_k\, f(\xi_k) \qquad \text{mit} \quad \xi_k = -1 + 2 \cdot \frac{k+1}{n+2}, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{4}$$

im Intervall $[-1, 1]$.

a) Betrachten Sie (4) für $n = 2$ und bestimmen Sie die Gewichte w_k in (4) so, dass alle Polynome bis und mit Grad 2 exakt integriert werden.

b) Benützen Sie (4) mit $n = 2$ aus a), um das Integral

$$I = \int_a^b f(x)\, dx,$$

   numerisch zu integrieren. Dabei sind $a = -\frac{\pi}{2}$, $b = \frac{\pi}{2}$ und $f(x) = \cos(x)$.
   Welchen absoluten bzw. relativen Fehler machen Sie dabei?

Viel Erfolg!

MNM **Lösungen Schlussprüfung** **10.06.09**

Lösung 1

Gauss-Algorithmus, Endschema:

$$\begin{array}{|ccc|ccc|} 0 & 1 & 0 & 3 & 10 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 2 & 2 \end{array}$$

a)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 6 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) erster Schritt: $Lc = Pb$, wobei $Pb = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow c = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

zweiter Schritt: $Rx = c \Longrightarrow x = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lösung 2

a)

$$H'(q) = \frac{q}{\sqrt{q^2-1}} - \frac{q}{\sqrt{q^2-1000}} \Longrightarrow \kappa_H(q) = \left| \frac{q \cdot H'(q)}{H(q)} \right| = \frac{q^2}{\sqrt{q^2-1} \cdot \sqrt{q^2-1000}}$$

$$\lim_{q \longrightarrow \infty} \kappa_H(q) = \left| \frac{q^2}{q\sqrt{1-\frac{1}{q^2}} \cdot q\sqrt{1-\frac{1000}{q^2}}} \right| = 1$$

b) Da die Kondition in a) sehr gut ist, kann die Auslöschung vermieden werden, durch Erweiterung von $H(q)$ mit der Summe der beiden Wurzeln:

$$H(q) = \frac{999}{\sqrt{q^2-1} + \sqrt{q^2-1000}}$$

Lösung 3

a) $A^{-1} = 10^8 \begin{pmatrix} 1+10^{-8} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+10^8 & -10^8 \\ -10^8 & 10^8 \end{pmatrix}$, also

$\kappa(A) = \|A\|_\infty \cdot \left\|A^{-1}\right\|_\infty = (2+10^{-8})^2 \cdot 10^8$

b) $\hat{x}_k = A^{-1}\hat{b}_k$ für $k = 1, 2$

b1) $\hat{x}_1 = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon 10^8 \\ \varepsilon 10^8 \end{pmatrix}$ und b2) $\hat{x}_2 = \begin{pmatrix} (1+\varepsilon)+\varepsilon 10^8 \\ -\varepsilon 10^8 \end{pmatrix}$

c) $\Delta\hat{x}_k = \hat{x}_k - x_k$ für $k = 1, 2$

b1) $\Delta\hat{x}_1 = \begin{pmatrix} -\varepsilon 10^8 \\ \varepsilon 10^8 \end{pmatrix}$ also $\|\delta\hat{x}_1\|_\infty = \frac{\|\Delta\hat{x}_1\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \varepsilon 10^8$

und b2) $\Delta\hat{x}_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon+\varepsilon 10^8 \\ -\varepsilon 10^8 \end{pmatrix}$ also $\|\delta\hat{x}_2\|_\infty = \frac{\|\Delta\hat{x}_2\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \varepsilon(1+10^8)$

theoretische Schranke: $\|\delta\hat{x}\|_\infty = \kappa(A) \left\|\delta\hat{b}\right\|_\infty = (2+10^{-8})^2 \cdot 10^8\varepsilon$

für b1) *und* für b2) ist die theoretische Abschätzung realistisch, sie wird angenommen, d.h. das Problem ist *wirklich* schlecht konditioniert. Diese Schranke wäre nur dann nicht realistisch, falls in beiden Komponenten gleichzeitig und genau gleich gestört würde.

Lösung 4

a) $s = 1$, also $s = F(s)$ und für Konvergenz: $|F'(s)| < 1$

$$\text{i) } F'(x) = 2x - \frac{1}{2\sqrt{x}},\ F'(1) = \frac{3}{2} > 1 \qquad \text{ii) } F'(1) = \frac{3}{4} < 1 \qquad \text{iii) } F'(1) = 2 > 1$$

d.h. nur die Variante ii) ist konvergent.

b) Bisektion: in jedem Schritt wird der Fehler halbiert: $n > \frac{1}{\ln(2)} \cdot \ln\left(\frac{10^4}{5}\right)$

Varainte ii): in jedem Schritt wird der Fehler um $q = \frac{3}{4}$ verkleinert: $n > \dfrac{\log\left(\frac{5 \cdot 10^{-4}}{3}\right)}{\log\left(\frac{3}{4}\right)}$

Variante ii) ist also langsamer als die Bisektion.

Lösung 5

a) Die Lösungen von (3) sind $s_1 = 1$ und $s_2 = -4$.

b) Fixpunktiteration: $x = F(x)$

$$x = F_1(x) = \sqrt{4 - 3x} \qquad \text{oder} \qquad x = F_2(x) = \frac{1}{3}(4 - x^2)$$

$$|F_1'(s_1)| = \frac{3}{2} > 1 \qquad |F_2'(s_1)| = \frac{2}{3} < 1$$

d.h. $s_1 = 1$ ist für F_2 ein attraktiver Fixpunkt.
$x_0 = 2$, $x_1 = F_2(x_0) = 0$, $x_2 = F_2(x_1) = \frac{4}{3}$ und $x_3 = F_2(x_2) = \frac{20}{27}$
$q \approx \frac{8}{9} < 1!$ Tatsächlich ist $q = \frac{2}{3} = |F_2'(s_1)|$

c)

$$x_0' = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)^2}{(x_2 - 2x_1 + x_0)} = \frac{4}{5} \qquad x_1' = x_1 - \frac{(x_2 - x_1)^2}{(x_3 - 2x_2 + x_1)} = \frac{12}{13}$$

und damit

$$q_{Aitken} \approx \frac{5}{13}$$

Lösung 6

a) $n = 2$, d.h. $\xi_k = -1 + 2 \cdot \frac{k+1}{4}$, $k = 0, 1, 2$ und damit $\xi_0 = -\frac{1}{2}$, $\xi_1 = 0$ und $\xi_2 = \frac{1}{2}$
zu lösendes Gleichungssystem:

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} w_0 & + & w_1 & + & w_2 & = & 2 \\ -w_0 & & & + & w_2 & = & 0 \\ w_0 & & & + & w_2 & = & \frac{8}{3} \end{array} \right.$$

Lösung von (5): $w_0 = w_2 = \frac{4}{3}$ und $w_1 = -\frac{2}{3}$, mit dem Gauss-Algorithmus.

b) $[-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, wobei $x = x(\xi) = m\xi + q$. Hier $x = \frac{\pi}{2} \cdot \xi$, $-1 \leq \xi \leq 1$.

$I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, dx = \frac{\pi}{2} \int\limits_{-1}^{1} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \xi\right) d\xi \approx Q = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left\{4 \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 2 \cdot \cos(0) + 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\} =$
$\frac{\pi}{3} \cdot \left(2\sqrt{2} - 1\right)$.
Fehler: absoluter Fehler $\Delta I = |Q - I| = \left|\frac{\pi}{3} \cdot \left(2\sqrt{2} - 1\right) - 2\right|$ und
relativer Fehler $\delta I = \frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta I}{2}$.