Klasse WI07a **MLAN4 Schlussprüfung** 08. Juni 2009

Name:

Aufgabe 1

Gegeben ist die Differentialgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators

$$\ddot{x} + 0.2\,\dot{x} + 9.01x = 0 \tag{1}$$

mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 10$ und $\dot{x}(0) = 5$.

a) Schreiben Sie (1) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

b) Bestimmen Sie die *exakte* Lösung des Systems in a).

c) Approximieren Sie die Lösung aus b) mit der impliziten Methode von Euler, (Schrittweite $h > 0$). Geben Sie die dafür benötigte Rekursion an.

Aufgabe 2

Gegeben ist die quadratische Form

$$Q(x) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 \qquad x \in \mathbb{R}^2 \tag{2}$$

a) Schreiben Sie (2) in der Form x^TAx mit einer symmetrischen Matrix A.

b) Ist A positiv definit?

c) $Q(x) = 18$ definiert eine Kurve im $\mathbb{R}^2$. Um was für eine Kurve handelt es sich hier? Geben Sie den Mittelpunkt und, falls vorhanden, die Halbachsen an.

d) Gesucht sind *alle* $x \in \mathbb{R}^2$ mit $\|x\|_2 = 1$ so, dass $Q(x)$ extremal wird. Geben Sie auch die zugehörigen Extremwerte an.

Aufgabe 3

Gegeben ist die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -c \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Kondition von C bzgl. der $\|...\|_2-$ Norm in Abhängigkeit des Parameters c.

b) Wohin strebt die Kondition $\kappa(C)$ für $c \longrightarrow -1$?

bitte wenden

Aufgabe 4

(3) $$\ddot{y}(t) + 26\dot{y}(t) + 25y^3(t) = 0$$

a) Schreiben Sie (3) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung

b) Bestimmen Sie die Jacobi–Matrix des Systems aus a).

c) Seien nun die AB $y(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und $\dot{y}(0) = \beta$ gegeben. Bestimmen Sie $S(0)$.

d) Wie muss am Anfang h gewählt werden, damit mit der Methode von Heun der Ordnung $p = 2$ numerisch stabil gelöst wird?

Aufgabe 5

Student Zweistein schlägt das folgende Verfahren mit

(4) $$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}$$

vor. Er behauptet, dass (4) von der Ordnung $p = 2$ sei.

a) Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktion von (4).

b) Ist das Verfahren so gut wie Euler explizit? Ist seine Behauptung richtig? Würden Sie (4) verwenden?

c) Wenn nein, wie müsste (4) modifiziert werden?

Aufgabe 6

Gegeben ist die Differentialgleichung

(5) $$t \cdot \dot{y}(t) = y(t) + 1 \qquad \text{für } t \geq 1 \text{ mit der Anfangsbedingung } y(1) = y_1 = 0.$$

a) Bestimmen Sie die Lösung von (5).

b) Lösen Sie (5) mit der Methode der Taylorreihe.
Können Sie ein Bildungsgesetz für die Koeffizienten c_k angeben?

c) Bestimmen Sie mit den Koeffizienten c_k aus b) die Werte von y_2, y_3, y_4, $\ldots$ für $h = 0.2$.

Viel Erfolg!

Lösung 1

a) Substitution: $y_1 = x$ und $y_2 = \dot{x}$ und damit erhalten wir $\dot{y} = Ay$,
wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9.01 & -0.2 \end{pmatrix}$ und $y(0) = y_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$.

b) EWP von A: $\lambda_{1.2} = -0.1 \pm j\omega_\delta$, wobei $\omega_\delta = 3$ mit den EV $v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$ und $v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ und somit

$y_h(t) = 2\,e^{-0.1\,t}\,(a\cos(3t) - b\sin(3t)) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -0.1 \end{pmatrix} - 2\,e^{-0.1\,t}\,(b\cos(3t) + a\sin(3t)) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

AB: $\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = 2a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -0.1 \end{pmatrix} - 2b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} a & = & 5 \\ b & = & -1 \end{array} \right.$ und schliesslich

$y(t) = 2e^{-0.1\,t}\,(5\,\cos(3t) + \sin(3t)) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -0.1 \end{pmatrix} - 2e^{-0.1\,t}\,(-\cos(3t) + 5\,\sin(3t)) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) Euler implizit: $y_{k+1} = y_k + h\,f(x_{k+1},\, y_{k+1})$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, wobei hier $f(x, y) := Ay$, also

$$y_{k+1} = y_k + h\,A\,y_{k+1} \qquad \text{somit: } y_{k+1} = (I_2 - hA)^{-1} y_k \qquad \text{mit} \quad y_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Lösung 2

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

b) Eigenwerte von A: $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 2\lambda + \frac{3}{4} \stackrel{!}{=} 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \frac{3}{2}$ und $\lambda_2 = \frac{1}{2}$,
d.h. A ist positiv definit, da beide EW positiv sind.

c) Kurve in Σ_{neu}:

$$\frac{x_{neu_1}^2}{12} + \frac{x_{neu_2}^2}{36} = 1$$

Es handelt sich um eine Ellipse mit Mittelpunkt $M(0,0)$ und den Halbachsen $a = 2\sqrt{3}$, $b = 6$.

d) Eigenvektoren zu den EW aus b): $Q_{max} = \frac{3}{2}$ für $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$Q_{min} = \frac{1}{2}$ für $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung 3

a) Da C nicht symmetrisch ist, müssen die EW von $F = C^T C = \begin{pmatrix} 2 & 1-c \\ 1-c & 1+c^2 \end{pmatrix}$ berechnet werden:

$$det(F - \mu\, I_2) = \begin{vmatrix} 2-\mu & 1-c \\ 1-c & (1+c^2)-\mu \end{vmatrix} = \mu^2 - \mu\,(3+c^2) + (1+c)^2 \stackrel{!}{=} 0$$

was uns $\mu_{max} = \frac{3+c^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{3+c^2}{2}\right)^2 - (1+c)^2}$ und $\mu_{min} = \frac{3+c^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{3+c^2}{2}\right)^2 - (1+c)^2}$ liefert.
Gemäss Theorie sind beide EW von F positiv und $\kappa(C) = \|C\|_2 \cdot \|C^{-1}\|_2 = \frac{\sqrt{\mu_{max}}}{\sqrt{\mu_{min}}}$.

b) Mit $c \longrightarrow -1$ geht $(1+c)^2 \longrightarrow 0$ und damit geht $\mu_{max} \longrightarrow 4$ und $\mu_{min} \longrightarrow 0$, m.a.W.: $\kappa(C) \longrightarrow \infty$.
Für $c = -1$ haben wir $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, eine *singuläre* Matrix!

Lösung 4

a) $z_1 = y(t)$ $z_2 = \dot{y}(t) \Longrightarrow \dot{z} = f(z)$, wobei $f(z) = \begin{pmatrix} z_2 \\ -25z_1^3 - 26z_2 \end{pmatrix}$

b)
$$J = \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\right)_{1\leq i,j,\leq 2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z_1} & \frac{\partial f_2}{\partial z_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -75z_1^2 & -26 \end{pmatrix}$$

c)
$$J(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -26 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \lambda_1 = -25 \qquad \lambda_2 = -1 \qquad \Longrightarrow S(0) = 25$$

d) Stabilitätsgebiet für Heun, $p = 2$: $-2 < h\lambda < 0$, muss für *alle* negativen EW gelten
$\Longrightarrow \frac{2}{25} > h > 0$.

Lösung 5

a) Stabilitätsfunktion mit Hilfe des Testbeispiels $y'(x) = \lambda y(x)$:

$$(6) \qquad k_1 = f(x_k, y_k) = \lambda y_k$$

$$(7) \qquad k_2 = f\left(x_k + \frac{h}{3}, y_k + \frac{h}{3} \cdot k_1\right) = \left(\lambda + \frac{h\lambda^2}{3}\right) y_k$$

$$(8) \qquad y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} \cdot k_1 + \frac{h}{4} \cdot k_2 = \left(1 + \frac{3}{4}(h\lambda) + \frac{1}{12}(h\lambda)^2\right) y_k \neq \left(1 + (h\lambda) + \frac{(h\lambda)^2}{2!}\right) y_k$$

b) Aus (8) ist ersichtlich, dass das Vorgeschlagene Verfahren (4) *schlechter* als Euler explizit ist, also nicht einmal die Ordnung $p = 1$ hat! Die aufgestellte Behauptung ist falsch, (4) sollte nicht verwendet werden.

c) Modifikationen von (4) so, dass es brauchbar wird:

$$(9) \qquad \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ a_2 & b_{21} & \\ \hline & c_1 & c_2 \end{array}$$

Bei einem $2-$ stufigen Verfahren muss gelten:

$$(10) \qquad 1 = c_1 + c_2$$

$$(11) \qquad \frac{1}{2} = a_2 c_2$$

und zudem $a_2 = b_{21} = a$.
Mit (10) und (11) erhalten wir z.B.:

$$(12) \qquad \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \\ \hline & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}$$

Lösung 6

(5) ist inhomogen und separierbar, also $y_a(t) = y_h(t) + y_p(t)$

a) $y_h(t) = Ct$, $C \in \mathbb{R}$. $y_p(t)$ mit Variation der Konstanten oder einem Ansatz aus dem Papula: $y_p(t) = c_0$, da die Anregung konstant ist. in (5) einsetzen und Koeffizientenvergleich liefert $c_0 = -1$ und somit: $y_a(t) = Ct - 1$. Mit der AB: $C = 1$ und schliesslich $y(t) = t - 1$

b) Methode der Taylorreihe im allgemeinen Näherungspunkt (t_k, y_k):

$$y(t) = y_k + c_1(t - t_k) + c_2(t - t_k)^2 + c_3(t - t_k)^3 + \dots$$

$t = t_k + h$, also $h = (t - t_k)$ und damit

$$\begin{aligned}
&(13) \qquad & y(t_k + h) &= y_k + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + c_4 h^4 + \dots \\
&(14) \qquad & \dot{y}(t_k + h) &= c_1 + 2c_2 h + 3c_3 h^2 + 4c_4 h^3 + \dots
\end{aligned}$$

einsetzen in (5) und Koeffizientenvergleich:

$$(t_k + h) \cdot \big(c_1 + 2c_2 h + 3c_3 h^2 + 4c_4 h^3 + \dots\big) = \big(y_k + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + c_4 h^4 + \dots\big) + 1$$

$$\begin{array}{lllll}
h^0: & t_k c_1 & = y_k + 1 & \Longrightarrow c_1 = \dfrac{1}{t_k}(y_k + 1) \quad \text{Euler explizit} & \\
h^1: & c_1 + 2c_2 t_k & = c_1 & \Longrightarrow c_2 & = 0 \\
h^2: & 2c_2 + 3c_3 t_k & = c_2 & \Longrightarrow c_3 & = 0 \\
h^3: & 3c_3 + 4c_4 t_k & = c_3 & \Longrightarrow c_4 & = 0 \\
h^4: & 4c_4 + 5c_5 t_k & = c_4 & \Longrightarrow c_5 & = 0 \\
h^5: & 5c_5 + 6c_6 t_k & = c_5 & \Longrightarrow c_6 & = 0 \\
\vdots & \vdots & & &
\end{array}$$

D.h. $c_k = 0$ für alle $k \geq 2$ und damit

$$(15) \qquad y_{k+1} = y_k + \frac{1}{t_k}(y_k + 1) \cdot h \qquad k = 1, 2, 3, \dots$$

mit der AB $y_1 = 0$ für $t = 1$.

c)

$$\begin{array}{lll}
y_1 = 0 & & t_1 = 1 \\
y_2 = y_1 + \dfrac{1}{1}(y_1 + 1) \cdot h & = h & t_2 = 1 + h \\
y_3 = y_2 + \dfrac{1}{1 + h}(y_2 + 1) \cdot h & = 2h & t_3 = 1 + 2h \\
y_4 = y_3 + \dfrac{1}{1 + 2h}(y_3 + 1) \cdot h & = 3h & t_4 = 1 + 3h \\
y_5 = \dots & = 4h & \dots \\
\dots & & \\
y_k = (k - 1)h, \; k = 1, 2, 3, \dots & &
\end{array}$$

speziell für $h = 0.2$: $y_k = (k - 1) \cdot 0.2$, also $y_2 = 0.2$, $y_3 = 0.4$, $y_4 = 0.6$, …

1 Weitere Aufgaben

Aufgabe 7

$$y^{'''}(x) - 2y'(x) = x - y(x) \tag{16}$$

$$y^{'''}(x) - 7y'(x) + 6y(x) = 0 \tag{17}$$

a) Schreiben Sie (17) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

b) Lösen Sie das System aus a) durch Entkopplung, allgemeine Lösung

c) Wie müssen die Anfangsbedingungen gewählt werden, damit die Lösung für $t \longrightarrow \infty$ beschränkt bleibt?

Aufgabe 8

$$\ddot{x}(t) + \left[x^2(t) + \dot{x}^2(t) - 1\right] \dot{x}(t) + x(t) = 0 \tag{18}$$

a) Schreiben Sie (18) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

b) Bestimmen Sie die Jacobi–Matrix J des Systems aus a), allgemein.

c) Sei nun $y(0) = y_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Steifheit $S(0)$ des Systems.

Aufgabe 9

$$\ddot{x}(t) + \varepsilon \left[x^2(t) - 1\right] \dot{x}(t) + x(t) = 0 \tag{19}$$