Klasse WI07a **MLAN4 erster Test** 24. März 2009

Name:

Aufgabe 1

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$(1) \qquad \ddot{y} - \dot{y} - 6y = 1 \qquad y(0) = \alpha \qquad \dot{y}(0) = \beta$$

a) Schreiben Sie (1) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von des Diffenerentialgleichungs–Systems aus a).

c) Wie müssen die Anfangsbedingungen gewählt werden, damit die Lösung für $t \longrightarrow \infty$ beschränkt bleibt?

Aufgabe 2

Gegeben ist die quadratische Form

$$(2) \qquad 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_2^2 + \frac{20}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{80}{\sqrt{5}}x_2 + 4 = 0$$

a) Führen Sie für (2) die Hauptachsentransformation durch.

b) Um was für eine Kurve handelt es sich?

c) Graphische Darstellung der Kurve, Mittelpunkt, Halbachsen, falls vorhanden.

Aufgabe 3

a) Gegeben ist die quadratische Form $Q(x) = x^T Ax$, $x \in \mathbb{R}^3$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ist A positiv definit? Welche Werte kann $Q(x)$ maximal bzw. minimal annehmen, falls $\|x\|_2 = 1$?

b) Von einem Differentialgleichungssystem $\dot{x} = Ax$ ist die allgemeine Lösung

$$x_h(t) = 2e^{-t}\left\{\left[a_1\cos(\sqrt{2}t) - b_1\sin(\sqrt{2}t)\right]u^{(1)} - \left[a_1\sin(\sqrt{2}t) + b_1\cos(\sqrt{2}t)\right]w^{(1)}\right\},$$

wobei $u^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $w^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ gegeben.

Geben Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 von A an. Bestimmen Sie die Spur und die Determinante von A. Bestimmen Sie A.

WI07a MLAN4 Lösungen erster Test 24.03.09

Lösung 1

a) Substitution: $z_1 = y$ und $z_2 = \dot{y} \Longrightarrow \dot{z} = Az + g(t)$, wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ und $g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) EWP von A: $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -2$ mit den zugehörigen EV $v^{(1)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $v^{(2)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$,

also $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ und $g_{neu}(t) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$z_h(t) = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + z_p(t) \quad z_{neu_p}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{10} \end{pmatrix} \quad z_p(t) = T z_{neu_p}(t) = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $c_1 = 0 \Longrightarrow 2\alpha + \beta = -\frac{1}{3}$, mit $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$.

Lösung 2

a)

$$x^T A x + c^T x + 4 = 0 \qquad A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 20 \\ -80 \end{pmatrix}$$

EWP von A: $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = 9$ mit den o.n. EV $b_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Also $T = (b_1\ b_2)$ und $T^{-1} = T^T$, da T orthogonal. $c_{neu} = T^T c = \begin{pmatrix} -8 \\ -36 \end{pmatrix}$

In Σ_{neu} aufgespannt von b_1 und b_2, (nach quadratischer Ergänzung):

$$\frac{(x_{neu_1} - 1)^2}{9} + \frac{(x_{neu_2} - 2)^2}{4} = 1 \qquad M_{neu}(1,\, 2) \qquad M_{alt}(0,\, \sqrt{5})$$

b) Es handelt sich um eine Ellipse, da $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 > 0$. Die Halbachsen sind $a = 3$ und $b = 2$. Die Hauptachsen sind um den Winkel $\varphi = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ verdreht, der Mittelpunkt ist um den Vektor $t = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$ verschoben.

c) Graphik

Lösung 3

a) $A = A^T$, $\det(A - \lambda I_3) = (4 - \lambda) \cdot (\lambda^2 - 8\lambda + 8) \stackrel{!}{=} 0$, $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_{2.3} = 4 \pm 2\sqrt{2}$.
D.h. alle EW sind positiv, d.h. A ist positiv definit.
$Q_{max} = 4 + 2\sqrt{2}$ und $Q_{min} = 4 - 2\sqrt{2}$.

b) $\lambda_{1.2} = -1 \pm j\sqrt{2}$. Spur$(A) = -2$, $\det(A) = 3$

$$\hat{T} = \left(u^{(1)}\ w^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \hat{T}^{-1} A \hat{T} = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} = A_{neu}$$

und damit

$$A = \hat{T} A_{neu} \hat{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Lösung 4

f ist monoton fallend, d.h. für die Obersumme muss am linken Rand der Teilintervalle ausgewertet werden.

a) $\Delta x = \frac{2}{n}$ und $x_k = -1 + k \cdot \Delta x$ für $k = 1, 2, \ldots$, also

$$\begin{aligned} O_n &= \Delta x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \\ &= \Delta x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^{-x_k} = \Delta x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^{1-k\cdot\frac{2}{n}} \\ &= \frac{2}{n} \cdot e \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^{-k\cdot\frac{2}{n}} = \frac{2}{n} \cdot e \cdot \left(\frac{1-e^{-2}}{1-e^{-\frac{2}{n}}}\right) \end{aligned}$$

geometrische Teilsumme mit $q := e^{-\frac{2}{n}}$

b) $n > \frac{b-a}{\varepsilon} \cdot |f(b) - f(a)| = \frac{2}{5} \cdot 10^4 \left(\frac{e^2-1}{e}\right)$

Lösung 5

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \end{pmatrix}$, Rang$(A) = 1$

b) Schema nach einem Schritt:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1
1	2	3	4	5	0

4 freie Parameter: $x_{k+1} = \mu_k$, $k = 1, \ldots, 4$, also span$(U) = \{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$

und damit dim$(U) = 4$.

Lösung 6

a) $\sin(2x) \cdot \cos(3x) = \frac{1}{2}\{\sin(-x) + \sin(5x)\} = \frac{1}{2}\{-\sin(x) + \sin(5x)\}$ und damit:

$$(f_2(x), g_3(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} \ldots\, dx = \frac{1}{2} \cdot \left\{\cos(x) - \frac{1}{5}\cos(5x)\right\}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

d.h. f_2 und g_3 sind orthogonal.

b) Endschema:

α_1	α_2	α_3	α_4	1
1	0	1	0	0
.	1	-1	0	0
.	.	1	-1	0
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

Eine Basis ist z.B. $p_1(x) = 1 + x + x^5$, $p_2(x) = x^2 + x^4$ und $p_3(x) = 1 - x^2 + x^3 - x^5$.

Lösung 7

a)
- Seien $A \in U$ und $B \in U$: $(A+B)^T = A^T + B^T = -A - B = -(A+B) \Rightarrow A+B \in U$
- sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $a \in U$: $(\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha(-A) = -\alpha A = -(\alpha A) \Rightarrow \alpha A \in U$

D.h. U ist ein UR in V, $\dim(U) = 3$, da $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \in U$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

b) $b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung 8

a)

b)

c)

Mit dem Gauss-Algorithmus: Endschema:

x	y	z	1
2	3	1	0
.	2	4	0
.	.	3	0

d.h. der Rang $r = 3$, d.h. die drei Vektoren sind linear unabhängig.

Lösung 9

Gauss-Algorithmus

Schema nach einem Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	$4 - \frac{a^2}{2}$	$-2a$	$1 - 2a$

Schema nach zwei Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	.	$8 - 2a - a^2$	$7 - 2a - \frac{3}{4}\,a^2$

a)

b)

c)

d)

Lösung 10

a) $F \in g$, d.h. $F(-3+\mu, -3+7\mu, 1+3\mu)$ und damit $\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 5-\mu \\ 6-7\mu \\ 4-3\mu \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a} \cdot \overrightarrow{FA} = 0 \Longrightarrow \mu = 1$

und damit $F(-2, 4, 4)$. Also $g' : \; \vec{r} = \overrightarrow{0A} + \mu\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{0A'} = \overrightarrow{0A} + 2\overrightarrow{AF} \Longrightarrow A'(-6, 5, 3)$

Lösung 11

Gauss-Algorithmus, Endschema:

0	0	1	-1	-2	1
1	0	0	-1	-5	6
0	1	0	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{27}{5}$

Endschema:

x_1	x_2	x_3	x_4	1
1	0	1	-2	2
.	1	-2	3	-1
.	.	7	-6	5
.	.	.	.	2