Klasse WI07a **MLAN4 zweiter Test** 05. Mai 2009

Name:

Aufgabe 1

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$(1+t)\,x - \gamma\,\dot{x} = 0 \qquad \gamma \neq 0 \qquad \text{mit} \quad x(0) = 1. \tag{1}$$

a) Lösen Sie (1) mit Hilfe einer Potenzreihe (Koeffizientenvergleich bis und mit t^3).

b) Die Lösung von (1) soll mit der Methode "Euler implizit" numerisch approximiert werden. Führen Sie dazu den ersten Schritt von $t_0 = 0$ nach $t_1 = h$ durch.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Differentialgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators

$$\ddot{x} + \frac{1}{4}\,\dot{x} + x = 0 \tag{2}$$

mit den Anfangsbedingungen $x(0) = \alpha$ und $\dot{x}(0) = \beta$.

a) Schreiben Sie (2) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

b) Die Lösung von a) soll numerisch approximiert werden. Führen Sie einen Schritt mit dem Verfahren von Heun der Ordnung $p = 2$ von $t_0 = 0$ nach $t_1 = h$ durch.

c) Approximieren Sie die Lösung aus a) mit der Methode "verbesserter Polygonzug", (Schrittweite $h > 0$). Führen Sie den ersten Schritt aus.

Vergleich von b) und c), Feststellung?

Aufgabe 3

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\ddot{y} + 26\dot{y} + 25y = 0 \qquad \text{mit den AB} \quad y(0) = \alpha \qquad \dot{y}(0) = \beta. \tag{3}$$

a) Schreiben Sie (3) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

b) Bestimmen Sie die Steifheit $S(t)$ des Systems in a).

c) Wie muss die Schrittweite h gewählt werden, damit das System in a) mit "Euler explizit" numerisch stabil gelöst wird?

WI07a MLAN4 Lösungen zweiter Test 05.05.09

Lösung 1

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \qquad \dot{x}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1} \qquad x(0) = 1 = a_0$$

a) Koeffizientenvergleich nach Potenzen in t:

$$\begin{array}{llll}
(4) & t^0 : & a_0 = \gamma\, a_1 & a_1 = \dfrac{1}{\gamma} \\
(5) & t^1 : & a_0 + a_1 = 2\gamma\, a_2 & a_2 = \dfrac{1}{2\gamma}\left(1 + \dfrac{1}{\gamma}\right) \\
(6) & t^2 : & a_1 + a_2 = 3\gamma\, a_3 & a_3 = \dfrac{1}{3\gamma}\left(\dfrac{1}{\gamma} + \dfrac{1}{2\gamma}\left(1 + \dfrac{1}{\gamma}\right)\right) \\
(7) & t^3 : & a_2 + a_3 = 4\gamma\, a_4 & a_4 = \dfrac{1}{4\gamma}\left(\dfrac{1}{2\gamma}\left(1 + \dfrac{1}{\gamma}\right) + \dfrac{1}{3\gamma}\left(\dfrac{1}{\gamma} + \dfrac{1}{2\gamma}\left(1 + \dfrac{1}{\gamma}\right)\right)\right) \\
(8) & & \ldots &
\end{array}$$

b)

$$x(h) - x(0) = \frac{1}{\gamma} h(1+h)x(h) \quad \Longrightarrow \quad x(h) = \frac{\gamma}{\gamma - h(1+h)} \cdot x(0)$$

Lösung 2

a) Substitution: $y_1 = x$ und $y_2 = \dot{x}$ und damit erhalten wir $\dot{y} = Ay$, wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$ mit den AB $y(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

b) Heun, $p = 2$, Schema:

$$(9) \qquad \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
k_1 &= A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\
k_2 &= A\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + h \cdot k_1\right) = A\,(I_2 + h \cdot A) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\
y_1 &= y_0 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) = \left(I_2 + h \cdot A + \frac{h^2}{2!} \cdot A^2\right) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

c) "verbesserter Polygonzug", $p = 2$, Schema:

$$(10) \qquad \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
k_1 &= A\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\\
k_2 &= A\left(\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}+\frac{h}{2}\cdot k_1\right)=A\left(I_2+\frac{h}{2}\cdot A\right)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\\
y_1 &= y_0+h\cdot k_2=\left(I_2+h\cdot A+\frac{h^2}{2!}\cdot A^2\right)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

b) und c) sind identisch!

Lösung 3

a) Substitution: $x_1 = y$ und $x_2 = \dot{y}$ und damit erhalten wir $\dot{x} = Ax$, wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -25 & -26\end{pmatrix}$

   mit den AB $x(0) = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$.

b) $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = -25 \Longrightarrow S(t) = 25 =$ konstant.

c) $\frac{2}{\max|\lambda|} > h > 0$, d.h. $\frac{2}{25} > h > 0$.

Lösung 4

f ist monoton fallend, d.h. für die Obersumme muss am linken Rand der Teilintervalle ausgewertet werden.

a) $\Delta x = \frac{2}{n}$ und $x_k = -1 + k \cdot \Delta x$ für $k = 1, 2, \ldots$, also

$$\begin{aligned} O_n &= \Delta x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \\ &= \Delta x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^{-x_k} = \Delta x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^{1-k\cdot\frac{2}{n}} \\ &= \frac{2}{n} \cdot e \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^{-k\cdot\frac{2}{n}} = \frac{2}{n} \cdot e \cdot \left(\frac{1-e^{-2}}{1-e^{-\frac{2}{n}}}\right) \end{aligned}$$

geometrische Teilsumme mit $q := e^{-\frac{2}{n}}$

b) $n > \frac{b-a}{\varepsilon} \cdot |f(b) - f(a)| = \frac{2}{5} \cdot 10^4 \left(\frac{e^2-1}{e}\right)$

Lösung 5

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \end{pmatrix}$, Rang$(A) = 1$

b) Schema nach einem Schritt:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1
1	2	3	4	5	0

4 freie Parameter: $x_{k+1} = \mu_k$, $k = 1, \ldots, 4$, also span$(U) = \{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$

und damit dim$(U) = 4$.

Lösung 6

a) $\sin(2x) \cdot \cos(3x) = \frac{1}{2}\,\{\sin(-x) + \sin(5x)\} = \frac{1}{2}\,\{-\sin(x) + \sin(5x)\}$ und damit:

$$(f_2(x), g_3(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} \ldots\, dx = \frac{1}{2} \cdot \left\{\cos(x) - \frac{1}{5}\cos(5x)\right\}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

d.h. f_2 und g_3 sind orthogonal.

b) Endschema:

α_1	α_2	α_3	α_4	1
1	0	1	0	0
.	1	-1	0	0
.	.	1	-1	0
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

Eine Basis ist z.B. $p_1(x) = 1 + x + x^5$, $p_2(x) = x^2 + x^4$ und $p_3(x) = 1 - x^2 + x^3 - x^5$.

Lösung 7

a)
- Seien $A \in U$ und $B \in U$: $(A+B)^T = A^T + B^T = -A - B = -(A+B) \Rightarrow A+B \in U$
- sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $a \in U$: $(\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha(-A) = -\alpha A = -(\alpha A) \Rightarrow \alpha A \in U$

D.h. U ist ein UR in V, $\dim(U) = 3$, da $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \in U$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

b) $b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung 8

a)

b)

c)

Mit dem Gauss-Algorithmus: Endschema:

x	y	z	1
2	3	1	0
.	2	4	0
.	.	3	0

d.h. der Rang $r = 3$, d.h. die drei Vektoren sind linear unabhängig.

Lösung 9

Gauss-Algorithmus

Schema nach einem Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	$4-\frac{a^2}{2}$	$-2a$	$1-2a$

Schema nach zwei Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	.	$8-2a-a^2$	$7-2a-\frac{3}{4}a^2$

a)

b)

c)

d)

Lösung 10

a) $F \in g$, d.h. $F(-3+\mu, -3+7\mu, 1+3\mu)$ und damit $\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 5-\mu \\ 6-7\mu \\ 4-3\mu \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a} \cdot \overrightarrow{FA} = 0 \Longrightarrow \mu = 1$

und damit $F(-2, 4, 4)$. Also $g' : \ \vec{r} = \overrightarrow{0A} + \mu\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{0A'} = \overrightarrow{0A} + 2\overrightarrow{AF} \Longrightarrow A'(-6, 5, 3)$

Lösung 11

Gauss-Algorithmus, Endschema:

0	0	1	-1	-2	1
1	0	0	-1	-5	6
0	1	0	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{27}{5}$

Endschema:

x_1	x_2	x_3	x_4	1
1	0	1	-2	2
.	1	-2	3	-1
.	.	7	-6	5
.	.	.	.	2