Klasse WI08a **MLAN2 - Test 2** 8. Mai 2009

Name:

Aufgabe 1

Gegeben sind die beiden harmonischen Schwingungen

$$f_1(t) = 2\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right),$$
$$f_2(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right).$$

a) Bestimmen Sie mit Hilfe von Zeigern die Überlagerung

$$f(t) = f_1(t) - f_2(t) = A \cdot \sin(t + \varphi).$$

Skizzieren Sie das Zeigerdiagramm für $t = 0$ (Einheiten für beide Achsen: 2 Häuschen).

b) Bestimmen Sie alle Lösungen t der Gleichung

$$2\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Aufgabe 2

a) Gegeben ist die Gleichung

$$\sin(x) + 0.5 = \frac{x}{3}.$$

Welches der folgenden Intervalle ist als Startintervall geeignet, um mit Hilfe der *Bisektion* eine Nullstelle der Gleichung zu bestimmen?

$$I_1 = \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right], \qquad I_2 = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

Wieviele Rechenschritte braucht die Bisektion mindestens, damit die Fehlerschranke $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$ sicher unterschritten wird?

b) Gegeben ist die Gleichung

$$(x+1) \cdot (x-2) = 0.$$

Die kleinere der beiden Lösungen s soll mit Hilfe der *Fixpunkt-Iteration* bestimmt werden. Bestimmen Sie anhand des Konvergenzquotienten $q = |F'(s)|$ eine geeignete Iterationsgleichung.

Aufgabe 3

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10^{-4} & 0 & 10^{-4} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Konditionen $\kappa_\infty(A)$ und $\kappa_1(A)$ von A bezüglich der ∞- bzw. der 1-Norm.

b) Für $\varepsilon > 0$ sei die fehlerbehaftete rechte Seite

$$\hat{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie die auf den Konditionen von A basierenden Abschätzungen des relativen Fehlers der Lösung bezüglich der beiden Normen aus a).

c) Welchen der Werte aus b) wählen Sie zur theoretischen Fehlerabschätzung? Begründen Sie Ihre Antwort.

MLAN2 Lösungen Test 2 08.05.09

Lösung 1

a) Durch Umschreiben auf positive Amplituden erhält man

$$f(t) = 2\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(t + \pi),$$

womit sich das Zeigerdiagramm für $t = 0$ zeichnen lässt (der resultierende Zeiger liegt im zweiten Quadranten!). Die Überlagerung lautet

$$f(t) = \sqrt{5} \cdot \sin(t + \pi - \arctan(2)).$$

b) Aus der Gleichung

$$f(t) = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

erhält man

$$\sin(t + \pi - \arctan(2)) = \frac{1}{2}.$$

Damit lauten die Lösungen für t wie folgt:

$$t = -\frac{5\pi}{6} + \arctan(2) + k \cdot 2\pi \quad \text{oder} \quad t = -\frac{\pi}{6} + \arctan(2) + k \cdot 2\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Lösung 2

a) Durch Umschreiben der Gleichung auf die Form $f(x) = 0$ mit

$$f(x) = \sin(x) + 0.5 - \frac{x}{3}$$

erhält man folgende Randwerte:

- $f(\frac{\pi}{2}) \approx 1$,
- $f(\pi) \approx -0.5$,
- $f(\frac{3\pi}{2}) \approx -2$.

Damit ist I_1 für die Bisektion ungeeignet. Das Intervall I_2 hingegen enthält eine Nullstelle von $f(x)$, die man mit Hilfe der Bisektion bestimmen kann.

Für die gegebene Fehlerschranke ε und das Startintervall I_2 erhält man die benötigte Anzahl Schritte:

$$n > \frac{\log(\pi \cdot 10^4)}{\log(2)}.$$

b) Die kleinere der beiden Lösungen lautet $s = -1$.

Erster Versuch: Setze $x = F(x)$, mit $F(x) = x^2 - 2$. Durch Ableiten erhält man den Konvergenzquotienten q:

$$q = |F'(-1)| = 2.$$

Damit ist die gesuchte Lösung in dieser Variante ein *abstossender* Fixpunkt.

Zweiter Versuch: Setze $x = F(x)$, mit $F(x) = -\sqrt{x+2}$. Der Konvergenzquotient q lautet in diesem Fall:

$$q = |F'(-1)| = \frac{1}{2}.$$

Damit ist die gesuchte Lösung diesmal ein *attraktiver* Fixpunkt. Eine mögliche Iterationsgleichung lautet also:

$$x_{k+1} = -\sqrt{x_k + 2}.$$

Lösung 3

a) Die inverse Matrix lautet

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \cdot 10^4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -10^4 \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man die folgenden Konditionen:

- $\kappa_\infty(A) = 60003$,
- $\kappa_1(A) = 60003$.

b) Mit Hilfe der Konditionen aus a) erhält man folgende Abschätzungen:

- $\|\delta x\|_\infty \leq \kappa_\infty(A) \cdot \|\delta b\|_\infty \approx 60000 \cdot \varepsilon$,
- $\|\delta x\|_1 \leq \kappa_1(A) \cdot \|\delta b\|_1 = 60003 \cdot \frac{\varepsilon}{2} \approx 30000 \cdot \varepsilon$.

c) Beide Ungleichungen sind mathematisch korrekte Aussagen. Deshalb darf die Variante mit dem *kleineren* relativen Fehler gewählt werden, also in diesem Fall die auf der 1-Norm basierende Abschätzung.