Klassen WI08bc **MLAN1 / MLAN2 Assessment** 18. August 2009

Name:

Bewertung: Alle Aufgaben haben dasselbe Gewicht.

Aufgabe 1

Das gleichseitige Dreieck ABC ist die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze S. Gegeben sind die beiden Eckpunkte $A(9,\, 9,\, 1)$ und $B(-3,\, 6,\, 4)$, sowie der Punkt $Q(8,\, 5,\, 2)$, der auf der Kante AC ist. Die Spitze S ist auf der Geraden h. h steht senkrecht auf die Grundfläche und geht durch den Schwerpunkt F des Dreiecks ABC.

a) Bestimmen Sie die Längen der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AQ}$.

b) Geben Sie die Koordinaten der Ecke C sowie diejenigen von F an.

c) $z_s = 13$ ist die $z-$ Koordinate von S. Bestimmen Sie die restlichen Koordinaten von S.

d) Bestimmen Sie den Winkel $\varphi = \sphericalangle(ASB)$. Was stellen Sie fest?

Aufgabe 2

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & ax_2 & + & bx_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2ax_2 & + & bx_3 & = & 2+a \\ -x_1 & + & ax_2 & - & x_3 & = & 2a-1-b \end{array}\right.$$

a) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ hat die Lösungsmenge zwei freie Parameter?

b) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ beschreibt die Lösungsmenge eine Gerade im $\mathbb{R}^3$?

c) Wann hat das gegebene Gleichungssystem genau eine Lösung?

Geben Sie in den Fällen a) und b) die Lösungen an.

Aufgabe 3

a) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} y^2 & -1 & -1 & -4y \\ x^2 & 0 & 1 & 2x \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ z^2 & 1 & 0 & -2z \end{pmatrix}.$$

b) Gegeben ist ein Gleichungssystem $Ax = b$ mit der System-Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \beta \\ 1 & \beta & 1 \end{pmatrix}$.

Für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{R}$ ist die Lösung von $Ax = b$ eindeutig?

Bitte wenden!

Aufgabe 4

a) Die reellen Parameter a und b sollen so bestimmt werden, dass für die Gleichung

$$|z - a - jb| = |z - 1 - 3j|$$

in der Unbekannten $z = x + jy \in \mathbb{C}$ die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{z = x + jy \mid y = x + 1\}$$

resultiert. Wie viele Lösungen für (a, b) gibt es?

b) Es seien R, L und C positive reelle Zahlen. Bestimmen Sie $\omega \in \mathbb{R}$ so, dass der Imaginärteil von

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

verschwindet.

Aufgabe 5

Gegeben ist die Gleichung

$$(1) \qquad x^2 + x - 2 = 0\,.$$

Die Nullstellen von (1) sollen mit der Iteration

$$(2) \qquad x_{k+1} = 2 - x_k^2$$

und dem Startwert $x_0 = 0$ bestimmt werden.

a) Erhalten Sie mit (2) eine der beiden Nullstellen von (1)? (*mit* Begründung)

Falls Sie a) mit einem Nein beantworten, werden folgende Auswege betrachtet:

bi) Beschleunigung mit Steffensen: bestimmen Sie mit dem Startwert $x_0 = 0$ den Wert $x_0^{(1)}$.

bii) Methode von Newton: bestimmen Sie mit dem Startwert $x_0 = 0$ die Werte x_1 und x_2.
Ist die Konvergenzbedingung für x_0 erfüllt? Überprüfen Sie zudem die Konvergenzbedingung für x_1.

Welcher der beiden Werte $x_0^{(1)}$ und x_2 ist qualitativ besser?

Aufgabe 6

Gegeben sind die beiden harmonischen Schwingungen

$$f_1(t) = 3\,\sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right),$$
$$f_2(t) = 5\,\cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right).$$

a) Bestimmen Sie mit Hilfe von Drehzeigern die Überlagerung

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = A \cdot \sin(t + \varphi),$$

und skizzieren Sie das Zeigerdiagramm für $t = 0$ (Einheiten für beide Achsen: 4 Häuschen).

b) Bestimmen Sie mit Hilfe von a) alle Lösungen der Gleichung

$$f_1(t) + f_2(t) = \frac{7}{2}\,.$$

MLAN1/2 Lösungen Assessment 18.08.09

Lösung 1

a) $\overrightarrow{AB} = 3 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = 9\sqrt{2}$ und $\overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left|\overrightarrow{AQ}\right| = 3\sqrt{2}$

b) $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \Longrightarrow \overrightarrow{0C} = \overrightarrow{0A} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, also $C(6,\, -3,\, 4)$.

$\overrightarrow{0F} = \frac{1}{3} \cdot \left(\overrightarrow{0A} + \overrightarrow{0B} + \overrightarrow{0C}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, also $F(4,\, 4,\, 3)$

c) $h\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu\vec{n}$, wobei $\vec{n}$ =Normalvektor der Ebene $E = E(A, B, C)$.

$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow S(6,\, 6,\, 13)$

d)

$$\cos(\varphi) = \frac{\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}}{|\overrightarrow{SA}||\overrightarrow{SB}|} = \frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

d.h. es handelt sich um ein reguläres Tetraeder.

Lösung 2

Gauss-Algorithmus

a) Vorzeitiger Abbruch ohne Widerspruch nach einem Schritt.

Tableau nach einem Schritt:

x_1	x_2	x_3	1
1	a	b	2
.	a	0	a
.	$2a$	$b-1$	$2a+1-b$

$a = 0$ und $b = 1$: $x_2 = \mu$, $x_3 = \nu$ und $x_1 = 2 - \nu$, also

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mu, \nu \in \mathbb{R}.$$

b) Vorzeitiger Abbruch ohne Widerspruch nach zwei Schritten.

Tableau nach zwei Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
1	a	b	2
.	1	0	1
.	.	$b-1$	$1-b$

$a \neq 0$ und $b = 1$: $x_3 = \mu$, $x_2 = 1$ und $x_1 = 2 - a - \mu$, also

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mu \in \mathbb{R}, \text{ Parameterdarstellung einer Geraden im } \mathbb{R}^3.$$

oder

Tableau nach zwei Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
1	0	b	2
.	.	$b-1$	$1-b$
.	.	.	.

$a = 0$ und $b \neq 1$: $x_3 = -1$, $x_2 = \mu$ und $x_1 = 2 + b$, also

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+b \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R}, \text{ Parameterdarstellung einer Geraden im } \mathbb{R}^3.$$

c) $a \neq 0$ und $b \neq 1$

Lösung 3

a) Durch Entwicklung nach der zweiten Spalte erhält man

$$\det(A) = \begin{vmatrix} x^2 & 1 & 2x \\ -1 & 0 & 2 \\ z^2 & 0 & -2z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y^2 & -1 & -4y \\ x^2 & 1 & 2x \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Berechnen der beiden $3 \times 3-$ Determinanten liefert sodann

$$\det(A) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2x - 4y - 2z.$$

b) Die Lösung ist eindeutig, falls $\det(A) = -(\beta - \alpha) \cdot (\beta - 1) \neq 0 \iff \alpha \neq \beta$ und $\beta \neq 1$.

Lösung 4

a) Mit $z = x + jy$ erhält man die Gleichung

$$|(x-a) + j(y-b)| = |(x-1) + j(y-3)|,$$

und durch Betragsbildung also

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = (x-1)^2 + (y-3)^2.$$

Daraus ergibt sich durch Umformen die Lösungsmenge

$$L = \left\{ z = x + jy \;\middle|\; y = \frac{a-1}{3-b} \cdot x + \frac{10 - a^2 - b^2}{6 - 2b} \right\}.$$

Ein Koeffizientenvergleich mit der geforderten Lösungsmenge ergibt jetzt das Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a & = & 4 - b, \\ 0 & = & a^2 + b^2 - 2b - 4 \end{array} \right.$$

Die Lösungen davon lauten

$$(a,\, b) = (1,\, 3) \qquad \text{und} \qquad (a,\, b) = (2,\, 2).$$

Setzt man die erste Lösung in die ursprüngliche Gleichung ein, so erhält man als Lösungsmenge der Gleichung $\mathbb{L} = \mathbb{C}$, was nicht korrekt ist. Daher lautet die *einzig richtige* Lösung $(a,\, b) = (2,\, 2)$.

b) Durch Umformen des Ausdrucks Z erhält man

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

Nullsetzen des Imaginäranteils liefert nach Umformungen die Lösungen

$$\omega = \pm\frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Lösung 5

a) $F(x) = 2 - x^2$, $F'(x) = -2x$. $|F'(s_k)| > 1$ für beide Nullstellen, da $s_1 = 1$ und $s_2 = -2$
Falls einfach iteriert wird, erhält man: $x_0 = 0$, $x_1 = 2$, $x_k = -2$ für $k \geq 2$,
d.h. $s_2 = -2$ erhält man zufällig!

bi) $x_0 = 0$ $x_1 = 2$ und $x_2 = -2 \Longrightarrow x_0^{(1)} = x_0 - \frac{(x_1-x_0)^2}{(x_2-2x_1+x_0)} = \frac{2}{3}$

bii) $f(x) = x^2 + x - 2 \Longrightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2+x_k-2}{2x_k+1}$
Mit $x_0 = 0$ erhalten wir $x_1 = 2$ und $x_2 = \frac{6}{5}$
$L(x_k) = \left|\frac{f(x_k)\cdot f''(x_k)}{(f'(x_k))^2}\right|$ und damit: $L(x_0) = 4 > 1$ aber bereits $L(x_1) = \frac{8}{25} < 1$.
Mit $x_0 = 0$ haben wir Konvergenz gegen $s_1 = 1$.

x_2 ist qualitativ besser als $x_0^{(1)}$, da $|x_2 - s_2| = \frac{1}{6} < |x_0^{(1)} - s_2| = \frac{1}{3}$.

Lösung 6

a) Durch Umschreiben von $f_2(t)$ in eine Sinusschwingung $\left(\cos(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right)$ erhält man

$$f_2(t) = 5\,\sin\left(t + \frac{2\pi}{3}\right).$$

Damit lässt sich das Zeigerdiagramm erstellen, und man erhält

$$A = 7 \qquad \text{und} \qquad \varphi = -\arctan(4\sqrt{3}) + \pi \qquad \text{(2. Quadrant!)}.$$

b) Mit den Ergebnissen aus a) erhält man die Gleichung

$$7\,\sin\left(t + \pi - \arctan(4\sqrt{3})\right) = \frac{7}{2}.$$

Deren Lösungen lauten

$$\begin{aligned} t &= \arctan(4\sqrt{3}) - \tfrac{5\pi}{6} + k\,2\pi \\ & \quad \text{oder} \qquad\qquad\qquad\qquad (k \in \mathbb{Z}). \\ t &= \arctan(4\sqrt{3}) - \tfrac{\pi}{6} + k\,2\pi \end{aligned}$$