

Inhalte:

Matrizenrechnung, Bsp Chablis

Gauss-Algorithmus – Determinante:

Parameterabh Glsyst, vollständige Diskussion

LR Zerlegung

Aufwand

rref ref

Kondition eines Problems eines Glsyst $Ax = b$

Geometrie Vektoren, 3d in einem Würfel

Ebenen – Geraden schneiden

Abstände: orthogonale Transversale

Winkel – Skalarprodukt

Projektion - Gram-Schmidt

Trigo:

trigonometrische Gleichungen – Zeiger – Harmonische Schwingungen

Komplexe Zahlen \mathbb{C}

Skalarprodukt – Vektorprodukt

nicht-lineare Gleichungen – Steffensen, Newton

Aufgabe 1 *neu? Determinanten*

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) & \sin(\beta) \\ \cos(\alpha) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

Für b) soweit wie möglich vereinfachen.

Lösung 1 *neu? Determinanten*

a) $\det(A) = 22$

b) $\det(B) = \sin(\alpha - \beta)$

Aufgabe 2 *neu?*ex a) Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks ABC mit den Ecken $A(-1, 2)$, $B(3, 4)$ und $C(5, -6)$.ex b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des von den Vektoren $\vec{a} = (1 \ 0 \ 3)^T$ und $\vec{b} = (2 \ 2 \ 3)^T$ aufgespannten Parallelogramms.ex c) Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks ABC mit den Ecken $A(1, -1, 3)$, $B(2, 1, 3)$ und $C(4, 1, -3)$.**Lösung 2** *neu?*

ex a) 22

ex b) 7

ex c) 7

Aufgabe 3 neu?

- a) Bestimmen Sie die Schnittgerade g der beiden Ebenen $E_1: 2x - 3y - z - 5 = 0$ und $E_2: 4x + y - z + 3 = 0$.
- b) Stellen Sie eine Parameterdarstellung der Geraden g auf, die durch den Punkt $P(1, 0, 3)$ geht und orthogonal zu den beiden Ebenen

$$g_1: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad g_2: \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist.

- c) Stellen Sie die Koordinatengleichung der Ebene E auf, die durch den Punkt $P(2, -1, 1)$ geht und senkrecht steht auf den beiden Ebenen $E_1: 3x + 2y - z + 4 = 4$ und $E_2: x + y + z - 3 = 0$.

Lösung 3 neu?

ex a)

$$g: \vec{r} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} \\ -\frac{13}{7} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ -\frac{1}{7} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

ex b)

$$g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

ex c) $E: 3x - 4y + z - 11 = 0$

Aufgabe 4 neu?

- a) Zeigen Sie, dass die Punkte $A(1, -1, 2)$, $B(-3, -3, 4)$ und $C(3, 0, 1)$ auf einer Geraden liegen.
- b) Berechnen Sie $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \times (\vec{a} + 4\vec{b})$.
- c) Das Vektorprodukt ist nicht assoziativ. Geben Sie dazu ein Beispiel an.

Lösung 4 neu?

ex a) $\vec{AB} \times \vec{AC} = \vec{0}$ oder einfacher mit Hilfe der linearen Abhängigkeit, da $\vec{AB} = \mu \vec{AC}$.

ex b) $11(\vec{a} \times \vec{b})$

ex c)

$$(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1 \quad \text{aber} \quad \vec{e}_1 \times (\vec{e}_2 \times \vec{e}_2) = \vec{e}_1 \times \vec{0} = \vec{0}$$

Aufgabe 5 neu?

Gegeben sind zwei Ebenen $E_1: 2x - y + 3z + 4 = 0$ und $E_2: x + y - 2z - 3 = 0$ und ein Punkt $P(2, 0, -1)$. Gesucht ist eine Parameterdarstellung der Geraden g , die durch P geht und zu beiden Ebenen parallel ist.

Aufgabe 6 neu? Valo

Das gleichseitige Dreieck ABC ist die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze S . Gegeben sind die beiden Eckpunkte $A(9, 9, 1)$ und $B(-3, 6, 4)$, sowie der Punkt $Q(8, 5, 2)$, der auf der Kante AC liegt.

- Bestimmen Sie die Längen der Vektoren \overrightarrow{AB} und \overrightarrow{AQ} .
- Geben Sie die Koordinaten der Ecke C an.
- $z_s = 13$ ist die z -Koordinate mit S . Bestimmen Sie die restlichen Koordinaten von S .
- Gesucht ist der Winkel $\varphi = \sphericalangle ASB$, was stellen Sie fest?

Aufgabe 7 alt

Gegeben sind zwei windschiefe Geraden

$$g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

sowie der Punkt $S(-9, 9, 0)$ im Grundriss. Gesucht ist eine Lichtrichtung so, dass sich die Schatten der Geraden g und h in der Grundrissebene im Punkt S schneiden.

Tipp: Überlegen Sie sich, was diese Aufgabe mit Transversalen zu tun hat.

Aufgabe 8 alt

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem

$$Cx = d$$

mit

$$C = \begin{pmatrix} c & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} -1 \\ -c \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- Für welche c hat das Gleichungssystem genau eine Lösung? Geben Sie die Lösung an.
- Für welche c hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen? Geben Sie die Anzahl freier Parameter und die Lösungsmenge an.
- Für welche c hat das Gleichungssystem keine Lösung?
- Geben Sie für die Fälle a) bis c) eine geometrische Interpretation an.

Aufgabe 9 alt

- Gegeben sind die beiden harmonischen Schwingungen

$$\begin{aligned} f_1(t) &= 2 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right), \\ f_2(t) &= -4 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe eines Zeigerdiagramms die Amplitude A und die Phase φ der Überlagerung

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = A \sin(\omega t + \varphi).$$

(Graphische Darstellung des Zeigerdiagramms: Auf beiden Achsen 4 Häuschen pro Einheit.)

- b) Bestimmen Sie alle Lösungen von $z^6 + 64j = 0$, und stellen Sie sie in der komplexen Ebene als Zeiger graphisch dar.
(Graphische Darstellung: Auf beiden Achsen 4 Häuschen pro Einheit.)

Aufgabe 10 alt

Gegeben ist die Gleichung

$$x^2 + 3x = 4.$$

- a) Bestimmen Sie algebraisch die Lösungen s_1 und s_2 der Gleichung.
- b) Die Gleichung wird nun mit gewöhnlicher Iteration numerisch gelöst. Dabei soll die betragsmässig kleinere Lösung ein attraktiver Fixpunkt sein.
Geben Sie eine geeignete Iterationsgleichung an.
Berechnen Sie damit ausgehend vom Startwert $x_0 = 2$ die Folgewerte x_1 und x_2 .
Bestimmen Sie $q \approx |F'(x_2)|$.
Wie gross ist der Konvergenzquotient q wirklich?
- c) Die Gleichung soll nun mit der Methode von Newton numerisch gelöst werden.
Geben Sie die dazu nötige Rekursion an.
Überprüfen Sie, ob die Konvergenzbedingung für x_0 aus b) erfüllt ist.
Gegen welche der beiden Nullstellen konvergiert das Verfahren? (mit Begründung)

Aufgabe 11 alt

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem $Bx = c$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 10^{-5} & 10^{-5} \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und der exakten Lösung} \quad x_e = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie die Kondition $\kappa(B)$ von B in der $\|\cdot\|_\infty$ -Norm.
- b) Gegeben sind nun für kleine positive ε die folgenden fehlerbehafteten rechten Seiten:

$$\text{b1) } \hat{c}_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{b2) } \hat{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie mit Hilfe von B^{-1} die entsprechenden Lösungen \hat{x}_1 und \hat{x}_2 .

- c) Bestimmen Sie für die beiden Lösungen aus b) die relativen Fehler $\|\delta\hat{x}_1\|_\infty$ und $\|\delta\hat{x}_2\|_\infty$.
Vergleichen Sie diese mit den Abschätzungen aufgrund der Kondition. Was stellen Sie fest?

Aufgabe 12 alt

- a) Bestimmen Sie die Determinante von

$$S = \begin{pmatrix} \sin(2\varphi) & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \sin(2\varphi) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \sin(2\varphi) & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \sin(2\varphi) \end{pmatrix}$$

- b) Für welche Werte von μ hat das folgende Gleichungssystem nicht-triviale Lösungen?

$$\begin{cases} (\mu - 3)x_1 & = x_2 \\ x_1 + (\mu - 3)x_2 & = 0 \end{cases}$$

Lösung 5 Vektorgeometrie alt

Die Lichtrichtung l ist eine Transversale von g und h durch den Punkt S .
Es sind verschiedene Lösungen möglich, z.B.:

$$\text{a) } E_a = E_a(g, S), P = h \cap E_a \implies l: \vec{r} = \overrightarrow{0S} + \mu \overrightarrow{SP}$$

$$E_a: 14x + 12y - 17z = -18 \implies P(1, 3, 4) \text{ und } l: \vec{r} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}.$$

$$\text{b) } E_b = E_b(h, S), Q = g \cap E_b \implies l: \vec{r} = \overrightarrow{0S} + \mu \overrightarrow{SQ}$$

$$E_b: 4x + 14y + 11z = 90 \implies Q(-4, 6, 2) \text{ und } l: \vec{r} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}.$$

Lösung 6 Diskussion von linearen Gleichungssystemen alt

Gauss-Algorithmus

Tableau nach zwei Schritten:

| x_1 | x_2 | x_3 | 1 |
|-------|-------|---------|--------------|
| ① | 0 | 1 | $-a$ |
| . | ① | $-a$ | $-1 + a^2$ |
| . | . | $a - 1$ | $-(a - 1)^2$ |

a) $a \neq 1$: $x_3 = -a + 1$, $x_2 = a - 1$ und $x_1 = -1$.

b) $a = 1$: vorzeitiger Abbruch nach zwei Schritten, d.h. ein freier Parameter.

Tableau für $a = 1$:

| x_1 | x_2 | x_3 | 1 |
|-------|-------|-------|------|
| ① | 0 | 1 | -1 |
| . | ① | -1 | 0 |
| . | . | 0 | 0 |

d.h. $x_3 = \mu \in \mathbb{R}$, also

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}.$$

c) unmöglich, cf. a) und b).

- d)
- Fall a): drei Ebenen, die sich in einem Punkt schneiden.
 - Fall b): drei Ebenen, die sich in einer Geraden schneiden.
 - Fall c): So wie die Geraden gegeben sind, haben sie immer mindestens einen Punkt gemeinsam.

Lösung 7 Harmonische Schwingungen und Zeiger, komplexe Zahlen alt

$$\text{a) } f_2(t) = -4 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) = 4 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3} + \pi\right) = 4 \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Diagramm: $\vec{a}_1(0) = \overrightarrow{0P_1}$, wobei $P_1\left(2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, 2 \cdot \frac{1}{2}\right)$ und $\vec{a}_2(0) = \overrightarrow{0P_2}$, wobei $P_2\left(4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right), 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Amplitude $A = |\vec{a}(0)| = |\vec{a}_1(0) + \vec{a}_2(0)| = 2\sqrt{5}$

Phase φ : $\tan(\varphi) = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{1 + 2\sqrt{3}}{-2 + \sqrt{3}} < 0 \implies \varphi = \arctan\left(\frac{1 + 2\sqrt{3}}{-2 + \sqrt{3}}\right) + \pi$

- b) $z^6 = -64j = 64e^{j\frac{3\pi}{2}} \implies z_k = r_k \cdot e^{j\varphi_k}, k = 0, 1, \dots, 5$, wobei
 $r_k = \sqrt[6]{64} = 2$ und $\varphi_k = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3}, k = 0, 1, 2, \dots, 5$.
 z_0, z_1, \dots, z_5 sind die Ecken eines um $\frac{\pi}{4}$ verdrehten regulären 6-Ecks.

Lösung 8 Iteration, Newtonverfahren alt

- a) $(x-1)(x+4) = 0 \implies s_1 = 1$ und $s_2 = -4$.
- b) $s_1 = 1$ soll attraktiver Fixpunkt sein. $x_{k+1} = F(x_k)$, wobei $F(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}$ mit $F'(x) = -\frac{2}{3}x$,
also $q \approx |F'(x_2)| = \frac{8}{9} < 1$. Der wirkliche Wert für q ist: $q = |F'(s_1)| = \frac{2}{3}$.
- c) Newton: $f(x) = x^2 + 3x - 4, f'(x) = 2x + 3$ und $f''(x) = 2$.
 $x_0 = 2$ mit der Rekursion: $x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 + 3x_k - 4}{2x_k + 3} = \frac{x_k^2 + 4}{2x_k + 3}, k = 0, 1, \dots$
 $L(x) = \left| \frac{(x^2 + 3x - 4) \cdot 2}{(2x + 3)^2} \right| \implies L(x_0) = \frac{12}{49} < 1$, d.h. die Konvergenzbedingung ist erfüllt.
 $x_0 = 2$, einsetzen: $x_1 = \frac{8}{7}$, einsetzen: $x_2 = \frac{260}{259}, \dots$, d.h. mit diesem x_0 konvergiert die Methode von Newton nach $s_1 = 1$.

Lösung 9 Kondition von Gleichungssystemen alt

$$A^{-1} = 10^5 \begin{pmatrix} 3 & -10^{-5} \\ -2 & 10^{-5} \end{pmatrix}$$

- a) Spaltenmaximum: $\|A\|_1 = 3 + 10^{-5}$ und $\|A^{-1}\|_1 = 5 \cdot 10^5$ und damit $\kappa(A) = 9 \cdot 10^5 + 3$

b) b1) $\hat{x}_1 = A^{-1}\hat{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 + 3\varepsilon 10^5 \\ 1 - 2\varepsilon 10^5 \end{pmatrix} = x_1 + \Delta x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon 10^5 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

b2) $\hat{x}_2 = A^{-1}\hat{b}_2 = (1 + \varepsilon) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = x_2 + \Delta x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- c) $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^2 |x_k|$, Summe der Beträge.

$$\|\delta \hat{x}_1\|_1 = \frac{\|\Delta x_1\|}{\|x_1\|} = \frac{5}{2} \varepsilon 10^5, \text{ und } \|\delta \hat{b}_1\|_1 = \frac{\|\Delta b_1\|}{\|b_1\|} = \varepsilon, \text{ da } \hat{b}_1 = b_1 + \Delta b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|\delta \hat{x}_2\|_1 = \frac{\|\Delta x_2\|}{\|x_2\|} = \varepsilon, \text{ und } \|\delta \hat{b}_2\|_1 = \frac{\|\Delta b_2\|}{\|b_2\|} = \varepsilon, \text{ da } \hat{b}_2 = b_2 + \Delta b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

theoretische Schranke: $\|\delta \hat{x}_1\|_1 \leq \kappa(A) \cdot \|\delta \hat{b}_1\|_1$ ist realistisch, sie wird angenommen, da der relative Fehler von \hat{x}_1 von $O(10^5)$.

$\|\delta \hat{x}_2\|_1 \leq \kappa(A) \cdot \|\delta \hat{b}_2\|_1$ hingegen ist zu pessimistisch, der relative Fehler von \hat{x}_2 ist gleich gross wie derjenige von \hat{b}_2 !

Lösung 10 Determinanten alt

- a) Entwicklung nach der ersten Spalte:

$$\det(A) = \cos(2\varphi) \begin{vmatrix} \cos(2\varphi) & 1 & 0 \\ 1 & \cos(2\varphi) & 1 \\ 0 & 1 & \cos(2\varphi) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \cos(2\varphi) & 1 \\ 0 & 1 & \cos(2\varphi) \end{vmatrix}$$

Die beiden 3-reihigen Determinanten werden ebenso nach der ersten Spalte entwickelt:

$$\begin{vmatrix} \cos(2\varphi) & 1 & 0 \\ 1 & \cos(2\varphi) & 1 \\ 0 & 1 & \cos(2\varphi) \end{vmatrix} = \cos(2\varphi) \begin{vmatrix} \cos(2\varphi) & 1 \\ 1 & \cos(2\varphi) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \cos(2\varphi) \end{vmatrix}$$

und

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \cos(2\varphi) & 1 \\ 0 & 1 & \cos(2\varphi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(2\varphi) & 1 \\ 1 & \cos(2\varphi) \end{vmatrix}$$

also

$$\det(A) = (\cos^2(2\varphi) - 1)^2 - \cos^2(2\varphi) = \cos^4(2\varphi) - 3\cos^2(2\varphi) + 1$$

- b) Determinante der System-Matrix muss Null sein, d.h. $(\lambda - 3)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 4)(\lambda + 2) = 0$
 $\implies \lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = -2$.