Klasse WI08bc **MLAN2 – Schlussprüfung** 12. Juni 2009

Name:

Bewertung: Alle Aufgaben haben dasselbe Gewicht.

Aufgabe 1

$$H(q) = \sqrt{q^2 - 1} - \sqrt{q^2 - 1000} \qquad q > 10\sqrt{10}. \tag{1}$$

Falls $q \longrightarrow \infty$, so entsteht bei der numerischen Bestimmung von (1) Auslöschung.

a) Bestimmen Sie für diesen Grenzfall die Kondition von (1), d.h. $\lim\limits_{q \to \infty} \kappa_H(q)$.

b) Können Sie die Auslöschung in (1) vermeiden? (*mit* Begründung)
Wenn ja, wie?

Aufgabe 2

Gegeben sind die beiden harmonischen Schwingungen

$$y_1 = f_1(t) = +3\,\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right), \tag{2}$$

$$y_2 = f_2(t) = -4\,\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right). \tag{3}$$

a) Bestimmen Sie mit Hilfe von Zeigern die Überlagerung $y = f_1(t) - f_2(t) = f(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$.
Skizzieren Sie das Zeigerdiagramm für $t = 0$, (Einheiten für beide Achsen 4 Häuschen).

b) Für welches $t > 0$ liegt der Zeiger der Überlagerung zum ersten auf Mal der
Geraden $g\colon y = -\frac{1}{\sqrt{3}}\,x$.

Aufgabe 3

Gegeben ist ein Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 9 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie mit der *relativen Kolonnen Maximumstrategie* die $LR-$ Zerlegung von A,
d.h. $LR = PA$.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Zerlegung aus a) die Lösung von $Ax = b$.

Aufgabe 4

Die Gerade $g_1: y = x$ und die Gerade $g_2: y = ax + b$ haben für $a \neq 1$ und $b \neq 0$ einen gemeinsamen Punkt S.
Graphische Darstellung für $a = -\frac{1}{2}$ und $b = 3$, Einheiten 4 Häuschen auf beiden Achsen.

a) Die x–Koordinate von S soll mit der gewöhnlichen Iteration bestimmt werden, Startwert $x_0 = 0$.
   - $F(x) = ?$
   - $q = |F'(s)|$
   - Wann ist der Fixpunkt attraktiv?

b) Ist das Prozedere aus a) auf $g_2: y = 3x - 1$ anwendbar? (mit Begründung)

   Falls Sie mit *Nein* antworten: Ausweg mit Aitken. Führen Sie mit dieser Beschleunigung drei Schritte durch, bestimmen Sie x'_0, x'_1 und x'_2, Startwert ist auch hier $x_0 = 0$, Feststellung?

Aufgabe 5

a) Stellen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der folgenden Ungleichung in der Gauss'schen Zahlenebene graphisch dar (Einheiten: auf beiden Achsen 2 Häuschen):

$$|j - z - 2| \leq |j + z + 1|$$

b) $z = w + w^{-2}$, wobei $w \in \mathbb{C}, |w| = 1$.

   b1) Für welche Argumente von w ist der Realteil von z gleich Null? (*alle* möglichen Werte)
   Tipp: w in Polarform.

   b2) Geben Sie für die Argumente aus b1) w in der kartesischen Form an.

Aufgabe 6

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 10^{-5} & 10^{-5} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{exakte Lösung: } x_e = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Kondition $\kappa(A)$ von A in der $\|.\|_1-$ Norm.

b) Betrachten Sie nun für $\varepsilon = 10^{-3}$ die fehlerbehafteten rechten Seiten:
   - $\hat{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$
   - $\hat{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 - \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}$

   und berechnen Sie mit Hilfe von A^{-1} die entsprechenden Lösungen $\hat{x}_1$ und $\hat{x}_2$.

c) Bestimmen Sie für die beiden numerischen Lösungen in b) jeweils den relativen Fehler in der $\|.\|_1-$ Norm und vergleichen Sie diesen mit der auf der Kondition basierenden Abschätzung. Was stellen Sie fest?

Viel Erfolg!

MLAN2 Lösungen Schlussprüfung 12.06.09

Lösung 1

$H'(q) := \frac{d}{dq}H(q) = \frac{q}{\sqrt{q^2-1}} - \frac{q}{\sqrt{q^2-1000}}$

a)

$$\kappa_H(q) = \left|\frac{q \cdot H'(q)}{H(q)}\right| = \left|\frac{q^2}{\sqrt{q^2-1}\sqrt{q^2-1000}}\right|$$

$$\lim_{q \longrightarrow \infty} \kappa_H(q) = \left|\frac{q^2}{q\sqrt{1-\frac{1}{q^2}} \cdot q\sqrt{1-\frac{1000}{q^2}}}\right| = 1$$

b) D.h. die Kondition ist gut und somit kann die Auslöschung vermieden werden, durch die Erweiterung von $H(q)$ mit der Summe der beiden Wurzeln.

$$H(q) = \frac{999}{\sqrt{q^2-1} + \sqrt{q^2-1000}}$$

Lösung 2

$f_2(t) = -4\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) = 4\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = 4\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$
graphische Darstellung, Zeigerdiagramm

a) $A = 5$ $\varphi = -\arctan(7) + \pi$

b) $\omega t + \varphi = \frac{5\pi}{6} \Longrightarrow t = \frac{1}{\omega}(-\frac{\pi}{6} + \arctan(7))$

Lösung 3

Gauss-Algorithmus, Endschema:

0	0	1	-3	-3	3
1	0	0	$-\frac{1}{3}$	2	4
0	1	0	$-\frac{2}{3}$	2	3

a)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) erster Schritt: $Lc = Pb$, wobei $Pb = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow c = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

zweiter Schritt: $Rx = c \Longrightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Lösung 4

a)
- $F(x) = ax + b$
- $q = |F'(s)| = |a| =$ konstant!
- Falls $|a| < 1 \iff -1 < a < 1$

b) Das Prozedere aus a) ist für g_2 nicht anwendbar, da $a = 3 > 1$!

Aitken:

$$
\begin{array}{lll}
x_0 = 0 & x_0' = x_0 - \dfrac{(x_1 - x_0)^2}{(x_2 - 2x_1 + x_0)} & = -\dfrac{(-1)^2}{(-4+2)} = \dfrac{1}{2} \\
x_1 = -1 & x_1' = x_1 - \dfrac{(x_2 - x_1)^2}{(x_3 - 2x_2 + x_1)} & = -1 - \dfrac{(-4+1)^2}{(-13+8-1)} = \dfrac{1}{2} \\
x_2 = -4 & x_2' = x_2 - \dfrac{(x_3 - x_2)^2}{(x_4 - 2x_3 + x_2)} & = -4 - \dfrac{(-13+4)^2}{(-40+26-4)} = \dfrac{1}{2} \\
x_3 = -13 & \ldots & \\
x_4 = -40 & & \\
\ldots & &
\end{array}
$$

Der Fixpunkt ist $s = \frac{1}{2}$, der bereits nach dem ersten Aitken–Schritt erhalten wird, obwohl $|F'(s)| > 1$.

Lösung 5

a) $z = x + jy$ und damit $|(-x-2) + j(1-y)| \leq |(x+1) + j(y+1)|$, also

$(-x-2)^2 + (1-y)^2 \leq (x+1)^2 + (y+1)^2 \Longrightarrow \mathbb{L} = \left\{(x,y) \middle| \, 2x - 4y + 3 \leq 0\right\}$

Graphische Darstellung

b) $w = e^{j\varphi}$ und damit

b1) $z = e^{j\varphi} + e^{-2j\varphi} = (\cos(\varphi) + \cos(2\varphi)) + j(\sin(\varphi) - \sin(2\varphi))$

Re$(z) = 0$: $\cos(\varphi) + \cos(2\varphi) = 0 \Longrightarrow 2\cos^2(\varphi) + \cos(\varphi) - 1 = 0$

$u := \cos(\varphi)$: $2u^2 + u - 1 = 0$

- $u_1 = \cos(\varphi) = \frac{1}{2}$: $\varphi_k = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ oder $\varphi_k = \frac{5\pi}{3} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $u_1 = \cos(\varphi) = -1$: $\varphi_k = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b2)
- $w_1 = \frac{1}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $w_2 = -\frac{1}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $w = -1$

Lösung 6

a) $A^{-1} = \frac{1}{10^{-5}} \begin{pmatrix} -10^{-5} & 4 \\ 10^{-5} & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \cdot 10^5 \\ 1 & -3 \cdot 10^5 \end{pmatrix}$

$\kappa(A) = \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1 = (4 + 10^{-5}) \cdot (7 \cdot 10^5) = 7 + 28 \cdot 10^5$

b) $\hat{x}_k = A^{-1}\hat{b}_k = x_e + \Delta x_k,\; k = 1,2$

$$\hat{b}_1 = b_1 + \Delta b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix} \Longrightarrow \Delta x_1 = A^{-1}\Delta b_1 = \varepsilon \begin{pmatrix} 4\cdot 10^5 \\ -3\cdot 10^5 \end{pmatrix}$$

also

$$\hat{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 4\cdot 10^5 \\ -3\cdot 10^5 \end{pmatrix}$$

$$\hat{b}_2 = b_2 + \Delta b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \Delta x_2 = A^{-1}\Delta b_2 = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\hat{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

c) Relative Fehler:

gemäss Theorie gilt allgemein: $\|\delta x_k\|_1 \leq \kappa(A)\cdot\|\delta b_k\|_1,\; k = 1,2$

$\|\delta b_1\|_1 = \varepsilon$ und $\|\delta x_1\|_1 = \frac{7}{2}\varepsilon 10^5 \leq \kappa(A)\|\delta b_1\|_1 = (7{+}28{\cdot}10^5)\varepsilon$, d.h. die Schranke ist realistisch.

$\|\delta b_2\|_1 = \varepsilon$ und $\|\delta x_2\|_1 = \varepsilon \leq \kappa(A)\|\delta b_2\|_1 = (7{+}28{\cdot}10^5)\varepsilon$, d.h. die Schranke ist zu pessimistisch!