Klasse WI08bc **MLAN2 – Schlussprüfung** 12. Juni 2009

Name:

Inhalte:
Kondition – Normen
Pivot – Strategie $LR = PA$
Kondition $\kappa(A)$ für $Ax = b$,
nicht–lineare Gleichungen, Regula falsi, Newton, ...
Beschleunigung: Aitken oder Steffensen
Banach
trigonometrische Gleichungen, Umformungen
Zeiger, Zeigerdiagramm
komplexe Zahlen $\mathbb{C}$
harmonische Schwingung, Überlagerung

überzählige Aufgaben, Anregungen für das Ass vom August 2009

Bewertung: Alle Aufgaben haben dasselbe Gewicht.

Aufgabe 1

$$H(q) = \sqrt{q^2 - 1} - \sqrt{q^2 - 1000} \qquad q > 10\sqrt{10}. \tag{1}$$

Falls $q \longrightarrow \infty$, so entsteht bei der numerischen Bestimmung von (1) Auslöschung.

a) Bestimmen Sie für diesen Grenzfall die Kondition von (1), d.h. $\lim\limits_{q\to\infty} \kappa_H(q)$.

b) Können Sie die Auslöschung in (1) vermeiden? (*mit* Begründung)
Wenn ja, wie?

Aufgabe 2 *neu*

Gegeben sind die beiden harmonischen Schwingungen

$$y_1 = f_1(t) = +3\,\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right), \tag{2}$$

$$y_2 = f_2(t) = -4\,\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right). \tag{3}$$

a) Bestimmen Sie mit Hilfe von Zeigern die Überlagerung $y = f_1(t) - f_2(t) = f(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$. Skizzieren Sie das Zeigerdiagramm für $t = 0$, (Einheiten für beide Achsen 2 Häuschen).

b) Für welches $t > 0$ liegt der Zeiger der Überlagerung zum ersten auf Mal der Geraden $g\colon y = -x\sqrt{3}$.

Aufgabe 3 *neu*

$$\ln(x) + x - 2.8 = 0 \tag{4}$$

Die nicht-lineare Gleichung hat eine Nullstelle bei ungefähr $x = 2$.

a) Stellen Sie (4) in der Form $h(x) = g(x)$ graphisch dar.

b) Die Nullstelle soll mit der Methode der Bisektion bestimmt werden. Wie müssen Sie ein Startintervall $[a, b]$ wählen?

c) Studentin XyX will (4) mit der gewöhnlichen Iteration lösen. Wie muss gerechnet werden, damit Sie eine konvergente Folge $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ erhalten? Startwert ist $x_0 = 2$.

   Geben Sie $q \approx |F'(x_0)|$ an.

Aufgabe 4 *neu*

Gegeben ist ein Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 9 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie mit der *relativen Kolonnen Maximumstrategie* die $LR-$ Zerlegung von A, d.h. $LR = PA$.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Zerlegung aus a) die Lösung von $Ax = b$.

Aufgabe 5 *neu*

Die Gerade $g_1\colon y = x$ und die Gerade $g_2\colon y = ax + b$ haben für $a \neq 1$ und $b \neq 0$ einen gemeinsamen Punkt S.

a) Die $x-$ Koordinate von S soll mit der gewöhnlichen Iteration bestimmt werden.
   - $F(x) = ?$
   - $q = |F'(s)|$
   - Wann ist der Fixpunkt attraktiv?

b) Ist das Prozedere aus a) auf $g_2\colon y = 3x - 1$ anwendbar? (mit Begründung)

   Falls, nein, warum nicht? Ausweg mit Aitken. Führen Sie mit dieser Beschleunigung drei Schritte durch, Feststellung?

   Steffensen $\longrightarrow$ Assessment

Aufgabe 6 *neu komplexe Zahlen $\mathbb{C}$*

a) Stellen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der folgenden Ungleichung in der Gauss'schen Zahlenebene graphisch dar:
$$|j - z - 2| \leq |j + z + 1|$$

b) Bestimmen Sie die Summe
$$s_n = \sum_{k=0}^{n} z^k \qquad z = -1 + j$$
allgemein für $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie den speziell den Wert von s_{23} an.

c) $z = w + w^{-2}$, wobei $w \in \mathbb{C}, |w| = 1$.

Für welche Argumente von w ist der Realteil von z gleich Null?

Tipp: w in Polarform.

Aufgabe 7 *neu*

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 10^{-5} & 10^{-5} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{exakte Lösung: } x_e = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Kondition $\kappa(A)$ von A in der $\|.\|_1-$ Norm.

b) Betrachten Sie nun für $\varepsilon = 10^{-3}$ die fehlerbehafteten rechten Seiten:

- $\hat{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$
- $\hat{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 - \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}$

und berechnen Sie mit Hilfe von A^{-1} die entsprechenden Lösungen $\hat{x}_1$ und $\hat{x}_2$.

c) Bestimmen Sie für die beiden numerischen Lösungen in b) jeweils den relativen Fehler in der $\|.\|_1-$ Norm und vergleichen Sie diesen mit der auf der Kondition basierenden Abschätzung. Was stellen Sie fest?

bitte wenden

Aufgabe 8 *neu?*

a) $1 - \tan(x) = \cos(2x)$, *alle* Lösungen.

b) Welche der folgenden Abbildungen $n_* \ : \ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine Norm?

   i) $n_1(x) = |x_1| + 2|x_2| + x_3^2$, wobei $x \in \mathbb{R}^3$

   ii) $n_2(x) = \sum_{j=1}^{4} \gamma_j \cdot |x_j|$, wobei $\gamma_j = \frac{1}{j^2}$, $j = 1, 2, 3, 4$ und $x \in \mathbb{R}^4$

Aufgabe 9 *neu Geometrie Vektorprodukt*

Aufgabe Valo
Pyramide, Vektorprodukt $\longrightarrow$ Assessment

Aufgabe 10 *alt*

Gegeben ist die nicht-lineare Gleichung

$$2x = 2^x. \tag{5}$$

a) Bestimmen Sie die Lösungen von (5) durch Erraten.

   Tipp: Skizzieren Sie sowohl die linke als auch die rechte Seite von (5) im selben Koordinatensystem.

b) Mit der Regula falsi soll nun (5) numerisch gelöst werden. Formen Sie (5) entsprechend um, und geben Sie für jede Nullstelle ein geeignetes Startintervall an.

c) Der Studentin C ist die Regula falsi zu langsam. Sie will (5) mit dem Verfahren von Newton lösen. Wie lautet die zugehörige Rekursionsformel? Sie startet mit $x_0 = 3$. Ist die Konvergenzbedingung für diesen Startwert erfüllt? (*mit* Begründung)

Aufgabe 11 *alt*

a) Stellen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der folgenden Ungleichung in der Gauss'schen Zahlenebene graphisch dar:

$$|j + z + 1| \leq 3$$

b) Lösen Sie die Gleichung

$$\left(\frac{z+j}{z-j}\right)^2 = j^{25}. \tag{6}$$

   Tipp: Für die Umformungen von (6) z stehen lassen.

Aufgabe 12 *neu funktioniert nicht!!*

Student ZXy will die Wurzel aus $a > 0$ mit der gewöhnlichen Iteration bestimmen.

a) Wie lautet die zu lösende Gleichung?

b) Wie muss er rechnen? Was ist jetzt $F(x) =?$ Für welche $a > 0$ geht es gut, geben Sie den Konvergenzquotienten $q = |F'(s)|$ an.

c) Studentin ABC ist das zu langsam, Sie will ein Verfahren, das ebenso schnell ist wie die Methode von Netwon und benützt deshalb das Verfahren von Steffensen. Verwenden Sie konkret $a = 9$ und $x_0 = 1$ und führen Sie zwei Schritte durch.

MLAN2 Lösungen Schlussprüfung 12.06.09

Lösung 1

$H'(q) := \frac{d}{dq}H(q) = \frac{q}{\sqrt{q^2-1}} - \frac{q}{\sqrt{q^2-1000}}$

a)

$$\kappa_H(q) = \left|\frac{q \cdot H'(q)}{H(q)}\right| = \left|\frac{q^2}{\sqrt{q^2-1}\sqrt{q^2-1000}}\right|$$

$$\lim_{q \longrightarrow \infty} \kappa_H(q) = \left|\frac{q^2}{q\sqrt{1-\frac{1}{q^2}} \cdot q\sqrt{1-\frac{1000}{q^2}}}\right| = 1$$

b) D.h. die Kondition ist gut und somit kann die Auslöschung vermieden werden, durch die Erweiterung von $H(q)$ mit der Summe der beiden Wurzeln.

$$H(q) = \frac{999}{\sqrt{q^2-1} + \sqrt{q^2-1000}}$$

Lösung 2

$f_2(t) = -4\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) = 4\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = 4\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$
graphische Darstellung, Zeigerdiagramm

a) $A = 5$ $\varphi = -\arctan(7) + \pi$

b) $\omega t + \varphi = \frac{2\pi}{3} \Longrightarrow t = \frac{1}{\omega}(-\frac{\pi}{3} + \arctan(7))$

Lösung 3

a)
-
-

b)
-
-

Lösung 4

Gauss-Algorithmus, Endschema:

$$\begin{array}{|ccc|ccc|}
\hline
0 & 1 & 0 & -4 & 5 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\
1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & \frac{9}{4} \\
\hline
\end{array}$$

a)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) erster Schritt: $Lc = Pb$, wobei $Pb = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Longrightarrow c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \frac{9}{8} \end{pmatrix}$

zweiter Schritt: $Rc = x \Longrightarrow x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Lösung 5

a)

b)

Lösung 6

a)

b)
-
-

c)

Lösung 7

a)

b)