Klasse WI08c **MLAN2 - zweiter Test** 06. Mai 2009

Name:

Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$2\sin(x) + \cos(x) = \frac{\sqrt{5}}{2}\,.$$

b) Gegeben ist $\varphi = \arctan(x)$. Drücken Sie φ mit Hilfe von $\arccos$ aus.

Aufgabe 2

a) Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit den Längen $|\vec{a}| = 4$ und $|\vec{b}| = 5$.

Wie klein kann das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ minimal werden und wie gross ist das Vektorprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ maximal?

Geben Sie für die entsprechenden Werte die gegenseitige Lage der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ an.

b) Gesucht ist eine Koordinatengleichung der Ebene, die durch den Punkt $P(2,\,-1,\,1)$ geht und senkrecht steht auf den Ebenen $E_1\colon 3x + 2y - z + 4 = 0$ und $E_2\colon x + y + z - 3 = 0$.

Aufgabe 3

a) Die Gleichung

$$\sin(x) = \frac{x}{3} - 0.5$$

hat im Intervall $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ eine Lösung.

Mit der Bisektion soll diese Lösung bestimmt werden. Dazu wird $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ als Startintervall gewählt.

- Ist diese Wahl korrekt?
- Wieviele Wiederholungen braucht es, damit im Resultat 4 korrekte Dezimalen nach dem Komma stehen, wie gross muss dabei ε sein?

b) Gegeben ist die Gleichung

$$f(x) = (x+1)\cdot(x-2) = 0\,.$$

Die eine der beiden Nullstellen soll mit gewöhnlicher Iteration bestimmt werden.

- Wie muss gerechnet werden?
- Wie gross ist der entsprechende Konvergenzquotient q?

MLAN2 Lösungen zweiter Test 06.05.09

Lösung 1

a) $\sin(x) + \frac{1}{2}\cos(x) = \frac{\sqrt{5}}{4}$, mit $\tan(\varphi) = \frac{1}{2}$ erhalten wir $\sin(x+\varphi) = \cos(\varphi)\frac{\sqrt{5}}{4}$, $\cos(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{5}}$, also $\sin(x+\varphi) = \frac{1}{2}$, mit $\varphi = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ erhalten wir:

- $x_k = \frac{\pi}{6} - \varphi + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$,
- $x_k = \frac{5\pi}{6} - \varphi + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) $\tan(\varphi) = x \Longrightarrow \cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ und damit $\varphi = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

Lösung 2

a) Normalvektor der gesuchten Ebene $\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(oder mit Skalarprodukten)

also $E\colon 3x - 4y + z + D = 0$. Bestimmung von D mit $P \in E \Longrightarrow D = -11$.

b) $(\vec{a} \cdot \vec{b})_{min} = -20$, wobei $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi$ und $|(\vec{a} \times \vec{b})|_{max} = 20$, wobei $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$.

Lösung 3

a) $f(x) = \sin(x) - \frac{x}{3} + 0.5 \stackrel{!}{=} 0$

- $f(\frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{6} + 0.5 > 0$ und $f(\pi) = \sin(\pi) - \frac{\pi}{3} + 0.5 < 0$, d.h. die Wahl ist korrekt.
- $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$: $n > \frac{1}{\ln(2)} \cdot \ln(\pi \cdot 10^4)$

b) Fixpunktiteration $x = F(x)$, wobei der Fixpunkt s attraktiv sein muss, d.h $q = |F'(s)| < 1$.

- $x = \sqrt{x+2}$, $F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$, $s = 2$
- $q = \frac{1}{4}$

($x = x^2 - 2$, $F'(x) = 2x$ ist für beide Fixpunkte betragsmässig grösser als eins)