Klasse ME08a **MND1 Schlussprüfung, Entwurf** 20. Januar 2010

Name:

Isoklinen
Richtungsfelder
Orthogonaltrajektorien
separierbare Dgl
Variation der Konstanten
Dgl zweiter Ordnung
Prinzip der LK, vorwärts und rückwärts
stetige Lösungen, Anschluss–Bedingungen
Systeme von Dgl; reelle, komplexe EW
EWP vorwärts und rückwärts
Stabilität
Numerik: Euler, Trapezmethode, Methode von Taylor, Taylorreihe, ...

Aufgabe 1 *alt*

Lösung im klassischen Sinn:
Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y''(x) + y'(x) - 2y(x) = \cos(2x) \tag{1}$$

a) Geben Sie die allgemeine Lösung von (1) an.
   Verwenden Sie für die Bestimmung der partikulären Lösung einen *Ansatz vom Typ der rechten Seite*.

b) Wie müssen die AB

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y(0) & = & \alpha \\ y'(0) & = & \beta \end{array} \right.$$

   gewählt werden, damit die Lösung für $x \longrightarrow \infty$ beschränkt bleibt.

Aufgabe 2 *alt*

Gegeben ist ein Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & -\frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix} x \tag{2}$$

- Lösen Sie das System in (5) durch Entkopplung.
- Skizzieren Sie das zugehörige Phasenporträt bzgl. Σ_{neu}.
- Skizzieren Sie das zugehörige Phasenporträt bzgl. Σ_{e}.
  Geben Sie den stabilen, bzw. instabilen Unterraum an.

Aufgabe 3 *alt*

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'''(x) + y''(x) - 2 \cdot y(x) = 0 \tag{3}$$

a) Schreiben Sie (3) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

b) Lösen Sie das System in a) durch Entkopplung.

Aufgabe 4 *neu*

überall steitig differenzierbare Lösung, Lösung klassisch
Auf einen Oszillator wirkt zuerst eine anregende Kraft und anschliessend eine dämpfende Kraft.
Die Differentialgleichung der Bewegung lautet:

$$\ddot{x} + x = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq \pi \\ \pi \cdot e^{\pi - t} & \pi < t \end{cases} \tag{4}$$

Bestimmen Sie diejenige Lösung, die $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 1$ erfüllt.
Die Lösung $x = x(t)$ soll samt ihrer ersten Ableitung für $0 \leq t < \infty$ stetig sein.

Aufgabe 5 *neu*

Gegeben ist ein Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} x \tag{5}$$

- Lösen Sie das System in (5) durch Entkopplung.
- Skizzieren Sie das zugehörige Phasenporträt bzgl. Σ_{neu}.
- Skizzieren Sie das zugehörige Phasenporträt bzgl. Σ_{e}.
  Geben Sie den stabilen, bzw. instabilen Unterraum an.

Aufgabe 6 *neu*

a) Lösung $\longrightarrow$ Dgl.

b) FB

Aufgabe 7 *neu*

Von einem Differentialgleichungssystem $\dot{x} = Ax$ ist die allgemeine Lösung

$$x_H(t) = c_1 \cdot e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie die Systemmatrix A.

b) Wie müssen die AB gewählt werden, damit die Lösung $x(t)$ für $t \longrightarrow \infty$ beschränkt bleibt?

Aufgabe 8 *neu*

a) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y''(x) + k^2 \cdot y(x) = 0. \tag{6}$$

Student XY behauptet, dass $y_1(x) = \cos(kx)$ und $y_2(x) = \sin(kx)$ eine Fundamentalbasis der Lösungen von (6) bilden.

Studentin YY hingegen behauptet, dass $y_1(x) = e^{jkx}$ und $y_2(x) = e^{-jkx}$ eine Fundamentalbasis der Lösungen von (6) bilden.

Wer hat Recht? (*mit* Begründung)

b) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + 2\delta \cdot \dot{x}(t) + x(t) = \cos(2t). \tag{7}$$

- Wie gross muss δ sein, damit die Resonanzfrequenz $\omega_r = \frac{\omega_0}{4}$ ist?
- Wie gross wird dabei die zugehörige Amplitude?

Aufgabe 9 *neu*

Gegeben ist das folgende Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = 1 - x^2 \qquad \text{AB:} \quad x(0) = x_0 > 0. \tag{8}$$

a) Bestimmen Sie die Lösung von (8).

b) Wie verhält sich die Lösung für grosse Werte von t?

Aufgabe 10 *neu*

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$(1 + x) \cdot y'(x) = y - y^2 \qquad \text{für} \quad x > -1. \tag{9}$$

Bestimmen Sie diejenige Lösung, die durch den Punkt $P(0, \frac{1}{2})$ geht.

Aufgabe 11 *neu*

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = Ax \qquad \text{wobei } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{mit den AB } x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{10}$$

a) Formulieren Sie für (10) die Methode von Euler.

b) Trapezmethode

Führen Sie in a) und b) je den ersten Schritt aus.

Aufgabe 12 *neu*

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - 2 \cdot y'(x) = 3 \cdot e^{2x}. \tag{11}$$

Aufgabe 13 *neu*

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y''(x) + \frac{3}{x} \cdot y'(x) + \frac{1}{x^2} \cdot y(x) = 0. \tag{12}$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$y(x) = \frac{a}{x} + b \cdot \frac{\ln(x)}{x} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

eine Lösung von (12) ist.

b) Bestimmen Sie a und b so, dass die Lösungskurve $y(x)$ durch den Punkt $P(2,2)$ geht und dort die Steigung $m = \frac{1}{2}$ hat.

Aufgabe 14 *neu*

Gegeben ist das folgende Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x \tag{13}$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (13).

b) Bestimmen Sie diejenige Lösung, für die $x(0) = x_0 = (1 \quad -1)^T$ gilt.

Aufgabe 15 *neu*

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\dddot{y}(t) - \ddot{y}(t) - 2 \cdot \dot{y}(t) + 2 \cdot y(t) = 0. \tag{14}$$

a) Schreiben Sie (14) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des in a) bestimmten Systems.

Aufgabe 16 *neu*

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$\dot{y} = Ay \qquad \text{wobei } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{mit den AB } y(0) = y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Lösen Sie (16) durch Entkopplung.

Aufgabe 17 *neu*

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$\dot{z} = Az + g(t) \qquad \text{wobei } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{und } g(t) = \begin{pmatrix} t \\ 3e^t \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Die allgemeine Lösung des homgenen Systems lautet:

$$z_H(t) = c_1 \cdot e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung $z_P(t)$.

b) Bestimmen Sie diejenige Lösung $z(t)$, für die $z(0) = z_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ erfüllt ist.

Aufgabe 18 *neu*

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$x \cdot y' = 4y + 3x^3 \qquad x > 0. \tag{17}$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (17).

b) Bestimmen Sie diejenige Lösung von (17), die durch den Punkt $P(\frac{1}{2}, 1)$ geht.

Aufgabe 19 *neu*

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\ddot{x} + 3 \cdot \dot{x} = 2 \cdot e^{-t} + 13 \cdot \cos(2t) \qquad x(0) = 1 \qquad \dot{x}(0) = 2. \tag{18}$$

Bestimmen Sie die Lösung von (18).

ME08a MND1 Lösungen Schlussprüfung 20.01.10

Lösung 1

$y_A(x) = y_H(x) + y_P(x)$

a) charakteristisches Polynom $p_2(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2 \stackrel{!}{=} 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -2$,

also $y_H(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$

Tabelle, z.B. Papula:

$y_P(x) = a_1 \cos(2x) + b_1 \sin(2x)$, einsetzen und Koeffizientenvergleich liefert: $a_1 = -\frac{3}{20}$ und $b_1 = \frac{1}{20}$, was schliesslich

$y_A(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} - \frac{3}{20} \cdot \cos(2x) + \frac{1}{20} \cdot \sin(2x)$ ergibt.

b)

$$\begin{array}{rclcl} y(0) & = & \alpha & = & c_1 + c_2 - \frac{3}{20} \\ y'(0) & = & \beta & = & c_1 - 2c_2 + \frac{1}{10} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} c_1 & = & \frac{1}{3} \cdot \left(2\alpha + \beta + \frac{1}{5}\right) \\ c_2 & = & \frac{1}{3} \cdot \left(\alpha - \beta + \frac{5}{20}\right) \end{array}$$

$c_1 \stackrel{!}{=} 0 \Longrightarrow 2\alpha + \beta + \frac{1}{5} = 0$

Lösung 2

a) 1. Teil: $0 \leq t \leq \pi$

$\ddot{x} + x = t$ mit der allgemeinen Lösung $x_A(t) = x_H(t) + x_P(t) = a_1 \cos(t) + b_1 \sin(t) + t$

AB: $a_1 = b_1 = 0$, also $x(t) = t$ für $0 \leq t \leq \pi$.

b) 2. Teil: $\pi \leq t < \infty$

$\ddot{x} + x = \pi \cdot e^{\pi - t}$ mit den neuen AB: $x(\pi) = \pi$ und $\dot{x}(\pi) = 1$ und der allgemeinen Lösung

$x_A(t) = x_H(t) + x_P(t) = a_1 \cos(t) + b_1 \sin(t) + \frac{\pi}{2} e^{\frac{\pi}{2}} e^{-t}$

AB: $a_1 = -\frac{\pi}{2}$ und $b_1 = \left(-\frac{\pi}{2} - 1\right)$ und damit

$x(t) = -\frac{\pi}{2} \cos(t) - \left(\frac{\pi}{2} + 1\right) \sin(t) + \frac{\pi}{2} e^{\frac{\pi}{2}} e^{-t}$ für $\pi \leq t < \infty$.

Lösung 3

a) EWP von A: $p_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 \Longrightarrow \lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$ mit den zugehörigen EV

$v^{(1)} = \mu_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v^{(2)} = \mu_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Somit $x_H(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

b) in Σ_{neu}:

$\dot{x}_{\mathsf{neu}_1} = -x_{\mathsf{neu}_1} \Longrightarrow x_{\mathsf{neu}_1}(t) = c_1 e^{-t}$

$\dot{x}_{\mathsf{neu}_2} = -x_{\mathsf{neu}_2} \Longrightarrow x_{\mathsf{neu}_2}(t) = c_2 e^{2t}$

Elimination von t: $x_2 = c_1^2 c_2 \frac{1}{x_1^2}$, Hyperbeln 2−ten Grades.

Der Nullpunkt ist ein Sattelpunkt.

$x_{\mathsf{neu}_1}(t) \longrightarrow 0$ für $t \longrightarrow \infty$

$x_{\mathsf{neu}_2}(t) \longrightarrow \infty$ für $t \longrightarrow \infty$

Graphik

c) Hier ist die Graphik um $\varphi = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ verdreht.

$E_{\lambda_1} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ = stabiler Unterraum

$E_{\lambda_2} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ = instabiler Unterraum

Lösung 4

a) Substitution: $z_1 = y$, $z_2 = y'$ und $z_3 = y''$ und damit: $z' = Az$, wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) EWP von A: $p_A(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2 + 2 \stackrel{!}{=} 0$ $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_{2.3} = -1 \pm j$.

Zugehörige EV: $v^{(1)} = \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v^{(2)} = \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1+j \\ -2j \end{pmatrix}$, $v^{(3)} = (v^{(2)})^\star$

$$z_H(x) = c_1 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2e^{-x} \left\{ [a_1 \cos(x) - b_1 \sin(x)] \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - [a_1 \sin(x) + b_1 \cos(x)] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

$c_1, a_1, b_1 \in \mathbb{R}$.