Klasse ME08a **MND1 erster Test** 21. Oktober 2009

Name:

Aufgabe 1

a) Wie lautet die Gleichung für die Isoklinen von

$$(2x+1)\cdot y' + y + x = 0$$

Um was für Kurven handelt es sich?

b) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y(x)\cdot y'(x) + x = 0. \tag{1}$$

Bestimmen Sie die positive Lösung von (1), die durch den Punkt $P(2,1)$ geht.
Bestimmen Sie zur obigen Lösung die orthogonale Trajektorie, die durch den Punkt $Q(1,1)$ geht.
Stellen Sie die Lösung samt orthogonaler Trajektorie graphisch dar,
Einheiten auf beiden Achsen 4 Häuschen.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'(x) = 3\cdot y(x)\cdot(5 - y(x)). \tag{2}$$

a) Zeigen Sie, dass

$$y(x) = \frac{5}{1 + C\cdot e^{-15x}} \tag{3}$$

für alle $C \in \mathbb{R}$ eine Lösung von (2) ist.

b) Wie muss $y(0) = y_0$ gegeben werden, damit $C = 1$ wird?

Aufgabe 3

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'(x)\cdot\cos(x) + y(x)\cdot\sin(x) = 1 \qquad \text{mit der AB} \quad y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}. \tag{4}$$

Bestimmen Sie die Lösung $y = y(x)$ von (4).

ME08a MND1 Lösungen erster Test 21.10.09

Lösung 1

a) $y' = k \Longrightarrow y(x) = -x(2k+1) - k$

Die Isoklinen sind Geraden mit der Steigung $m = -(2k+1)$ und dem $y-$ Achsenabschnitt $q = -k$.

b) $y' = -\frac{x}{y} \Longrightarrow y_H(x) = \pm\sqrt{C - x^2}$. Mit der AB folgt: $C = 5$, also $y(x) = \sqrt{5 - x^2}$

Dgl. der orthogonalen Trajektorien: $y' = \frac{y}{x} \Longrightarrow y_H(x) = Cx$, mit der AB folgt $C = 1$ und damit für die orthogonale Trajektorie: $y = x$.

Grafik

Lösung 2

a) Ableiten und einsetzen.

$$y'(x) = \frac{C \cdot 75 \cdot e^{-15x}}{(1 + C \cdot e^{-15x})^2}$$

b) $y_0 = \frac{5}{2}$

Lösung 3

- erster Schritt: Separation der Variablen
  $y_H(x) = C \cdot \cos(x)$, $C \in \mathbb{R}$.
- zweiter Schritt: Variation der Konstanten
  $y_P(x) = C(x) \cdot \cos(x)$, einsetzen $\Longrightarrow C(x) = \tan(x)$
- dritter Schritt: allgemeine Lösung
  $y_A(x) = y_H(x) + y_P(x) = C \cdot \cos(x) + \sin(x)$, $C \in \mathbb{R}$.
  Bestimmung von C mit der AB: $C = -1$, also $y(x) = -\cos(x) + \sin(x)$.