Klasse ME08a **MND1 zweiter Test** 03. Dezember 2009

Name:

Aufgabe 1

Lösung im klassischen Sinn:
Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y''(x) + y'(x) - 2y(x) = \cos(2x) \tag{1}$$

a) Geben Sie die allgemeine Lösung von (1) an.
Verwenden Sie für die Bestimmung der partikulären Lösung einen *Ansatz vom Typ der rechten Seite*.

b) Wie müssen die AB

$$\begin{cases} y(0) &= \alpha \\ y'(0) &= \beta \end{cases}$$

gewählt werden, damit die Lösung für $x \longrightarrow \infty$ beschränkt bleibt.

Aufgabe 2

Gegeben ist ein Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & -\frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix} x \tag{2}$$

- Lösen Sie das System in (2) durch Entkopplung.
- Skizzieren Sie das zugehörige Phasenporträt bzgl. Σ_{neu}.
- Skizzieren Sie das zugehörige Phasenporträt bzgl. Σ_{e}.
  Geben Sie den stabilen, bzw. instabilen Unterraum an.

Aufgabe 3

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'''(x) + y''(x) - 2 \cdot y(x) = 0 \tag{3}$$

a) Schreiben Sie (3) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

b) Lösen Sie das System in a) durch Entkopplung.

ME08a **MND1** **Lösungen zweiter Test** **03.12.09**

Lösung 1

$y_A(x) = y_H(x) + y_P(x)$

a) charakteristisches Polynom $p_2(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2 \stackrel{!}{=} 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -2$,

also $y_H(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$

Tabelle, z.B. Papula:

$y_P(x) = a_1 \cos(2x) + b_1 \sin(2x)$, einsetzen und Koeffizientenvergleich liefert: $a_1 = -\frac{3}{20}$ und $b_1 = \frac{1}{20}$, was schliesslich

$y_A(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} - \frac{3}{20} \cdot \cos(2x) + \frac{1}{20} \cdot \sin(2x)$ ergibt.

b)

$$\begin{array}{rclcl} y(0) & = & \alpha & = & c_1 + c_2 - \frac{3}{20} \\ y'(0) & = & \beta & = & c_1 - 2c_2 + \frac{1}{10} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} c_1 & = & \frac{1}{3} \cdot \left(2\alpha + \beta + \frac{1}{5}\right) \\ c_2 & = & \frac{1}{3} \cdot \left(\alpha - \beta + \frac{5}{20}\right) \end{array}$$

$c_1 \stackrel{!}{=} 0 \Longrightarrow 2\alpha + \beta + \frac{1}{5} = 0$

Lösung 2

a) EWP von A: $p_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 \Longrightarrow \lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$ mit den zugehörigen EV

$v^{(1)} = \mu_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v^{(2)} = \mu_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Somit $x_H(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

b) in Σ_{neu}:

$\dot{x}_{\mathsf{neu}_1} = -x_{\mathsf{neu}_1} \Longrightarrow x_{\mathsf{neu}_1}(t) = c_1 e^{-t}$

$\dot{x}_{\mathsf{neu}_2} = -x_{\mathsf{neu}_2} \Longrightarrow x_{\mathsf{neu}_2}(t) = c_2 e^{2t}$

Elimination von t: $x_2 = c_1^2 c_2 \frac{1}{x_1^2}$, Hyperbeln $2-$ten Grades.

Der Nullpunkt ist ein Sattelpunkt.

$x_{\mathsf{neu}_1}(t) \longrightarrow 0$ für $t \longrightarrow \infty$

$x_{\mathsf{neu}_2}(t) \longrightarrow \infty$ für $t \longrightarrow \infty$

Graphik

c) Hier ist die Graphik um $\varphi = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ verdreht.

$E_{\lambda_1} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ = stabiler Unterraum

$E_{\lambda_2} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ = instabiler Unterraum

Lösung 3

a) Substitution: $z_1 = y$, $z_2 = y'$ und $z_3 = y''$ und damit: $z' = Az$, wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) EWP von A: $p_A(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2 + 2 \stackrel{!}{=} 0$ $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_{2.3} = -1 \pm j$.

Zugehörige EV: $v^{(1)} = \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v^{(2)} = \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1+j \\ -2j \end{pmatrix}$, $v^{(3)} = (v^{(2)})^\star$

$$z_H(x) = c_1 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2e^{-x} \left\{ [a_1 \cos(x) - b_1 \sin(x)] \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - [a_1 \sin(x) + b_1 \cos(x)] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

$c_1, a_1, b_1 \in \mathbb{R}$.