Klasse ME08? **MND1 erster Test** Oktober 2009

Name:

Aufgabe 1

Bestimmen Sie mit einer Untersumme U_n approximativ den Wert von

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{wobei } f(x) = mx + q, m > 0. \tag{1}$$

Das Intervall $[a, b]$ soll dabei in n gleichlange Teilintervalle zerlegt werden.

- Geben Sie U_n an, Resultat so einfach wie möglich.
- Wohin strebt der Wert von U_n, falls $n \longrightarrow \infty$?
- Wie viele Halbierungen müssen Sie für (1) machen, damit Sie mit der Methode von Simpson eine vorgegebene Toleranz ε einhalten?

Aufgabe 2

a) Gegeben ist der Vektor $u^T = (1,\ -2,\ 5) \in \mathbb{R}^3$. Betrachten Sie die Teilmenge

$$U := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^T u = 0 \right\}$$

aus $\mathbb{R}^3$.

Behauptung: U ist ein Unterraum in $\mathbb{R}^3$.

Überprüfen Sie diese Behauptung und geben Sie die Vektoren an, die U aufspannen. Wie gross ist die Dimension von U? Geometrische Interpretation von U

b) $z = 1 + w^2$, wobei $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| = 1$.

Für welche Argumente von w ist $\text{Re}(z) = 0$, *alle* Lösungen.

Tipp: w in Polarform.

Aufgabe 3

Betrachten Sie die Quadraturformel

$$Q = \sum_{k=0}^{2} w_k\, f(\xi_k) \qquad \text{mit} \quad \xi_k = -h,\ h,\ 3h. \tag{2}$$

im Intervall $[-h, 3h]$.

a) Bestimmen Sie die Gewichte w_k in (2) so, dass alle Polynome bis und mit Grad 2 exakt integriert werden.

b) Benützen Sie (2), um

$$I = \int_a^b f(x)\,dx,$$

numerisch zu integrieren. Dabei sind $a = -\frac{\pi}{4}$, $b = \frac{\pi}{4}$ und $f(x) = \cos(x)$.

Welchen absoluten bzw. relativen Fehler machen Sie dabei?

ME08? **MND1** **Lösungen erster Test** **Oktober 2009**

Lösung 1 *Untersumme*

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_k = a + k \cdot \Delta x$, $k = 0, 1, 2 \dots n$ und damit

$$\begin{aligned} U_n &= \Delta x \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \Delta x \sum_{k=0}^{n-1} \{m\,(a + k\Delta x) + q\} \\ &= \Delta x \left(n \cdot m \cdot a + \Delta x \cdot m \sum_{k=0}^{n-1} k + n \cdot q \right) \\ &= \Delta x \left(n \cdot m \cdot a + \Delta x \cdot m \cdot \frac{(n-1)n}{2} + n \cdot q \right) \\ &= (b-a) \left\{ m \cdot a + (b-a) \frac{(n-1)}{2n} + q \right\} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} U_n = (b-a) \left\{ m \cdot a + (b-a) \frac{1}{2} + q \right\} = m \cdot \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) + q(b-a)$$

Es muss einmal halbiert werden, da die Mitte für Simpson gebraucht wird, ($f^{(4)} \equiv 0$).
Die Methode von Simpson ist für dieses Beispiel viel zu gut!
Bereits die Trapezmethode würde ohne Halbierung den exakten Wert liefern.

Lösung 2 $\mathbb{C}$, *Unterraum*

a)
- $a \in U$, $b \in U$, $a^T u = 0$ und $b^T u = 0 \Longrightarrow (a+b)^T u = 0 \Longrightarrow a + b \in U$
- $a \in U$, $\mu \in \mathbb{R} \Longrightarrow (\mu a)^T u = \mu(a^T u) = 0 \Longrightarrow \mu a \in U$

D.h. $U \subset \mathbb{R}^3$ ist ein Unterraum. $U = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\dim(U) = 2$.

Geometrisch: U ist eine Ebene durch den Nullpunkt orthogonal zu u.

b) $w = e^{j\varphi}$ und damit $z = 1 + \cos(2\varphi) + j \sin(2\varphi) \Longrightarrow 1 + \cos(2\varphi) = 0$
und damit $\cos(2\varphi) = -1$, also $\varphi_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{N}$.

Lösung 3 *Quadratur mit Transformation*

a) Zu lösendes Gleichungssystem:

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} w_0 & + & w_1 & + & w_2 & = & 4h \\ -w_0 h & + & h w_1 & + & 3h w_2 & = & 4h^2 \\ w_0 h^2 & + & h^2 w_1 & + & 9h^2 w_2 & = & \frac{28h^3}{3} \end{array} \right.$$

Lösung von (3): $w_0 = w_2 = \frac{2h}{3}$ und $w_1 = \frac{8h}{3}$, mit dem Gauss-Algorithmus (ein Schritt und Rückwärtseinsetzen).

b) $[-h, 3h] \longrightarrow [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, wobei $x = x(\xi) = m\xi + q$. Hier $x = \frac{\frac{\pi}{2}}{4h} \cdot \xi + \left(a + \frac{b-a}{4}\right)$, $-h \leq \xi \leq 3h$.
Umrechnung der Stützstellen:

$$\xi_0 = -h\colon x_0 = a \qquad \xi_1 = h\colon x_1 = \frac{a+b}{2} \qquad \xi_2 = 3h\colon x_2 = b$$

$$I = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)\, dx \approx Q = \frac{\frac{\pi}{2}}{4h} \cdot \frac{2h}{3} \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 4 \cdot \cos(0) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{12}\left(\sqrt{2} + 4\right).$$

exakter Wert des Integrals: $I = \sqrt{2}$
Fehler: absoluter Fehler $\Delta I = |Q - I| = \left|\frac{\pi}{12}\left(\sqrt{2}+4\right) - \sqrt{2}\right|$ und
relativer Fehler $\delta I = \frac{\Delta I}{I} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Delta I$. Relativer Fehler in Prozenten: $\delta I \cdot 100\%$.

Aufgabe 4 *neu*

Gegeben ist das Integral:

$$I = \int_{-1}^{1} e^{-x}\,dx \tag{4}$$

I soll numerisch mit einer Obersumme bestimmt werden. Dabei soll das Intervall $[-1,\,1]$ in n gleichlange Teilintervalle zerlegt werden.

a) Wie gross muss n mindesten sein, um I mit einem absoluten Fehler kleiner $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$ zu berechnen?

b) Stundent X ist a) zu aufwendig. Er will (4) mit der Trapez–Methode numerisch bestimmen. Wie gross muss n mindestens sein, damit die in a) gegebene Toleranz erfüllt wird?

d) Stundent Z ist auch b) zu aufwendig. Er will (4) mit der Methode von Simpson numerisch bestimmen. Wie gross muss n mindestens sein, damit die in a) gegebene Toleranz erfüllt wird?

Aufgabe 5 *alt*

Gegeben ist $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$

a) Bilden Sie $A = v \cdot v^T$. Wie gross ist der Rang von A?

b) $U = \left\{x \in \mathbb{R}^5 \middle|\, Ax = 0\right\}$.
Geben Sie eine Basis für U an, wie gross ist die Dimension von U?

Aufgabe 6 *alt*

a) Gegeben ist das Skalarprodukt

$$(f,g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot g(x)\,dx. \tag{5}$$

Bestimmen Sie den Winkel zwischen $f_2(x) = \sin(2x)$ und $g_3(x) = \cos(3x)$ bzgl. (5).

b) Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{P}_5$ ($=$ Polynome vom Grad ≤ 5).
Gegeben ist $U = \text{span}\left\{1 + x + x^5, x^2 + x^4, 1 - x^2 + x^3 - x^5, x - x^3 - x^4 + 2x^5\right\}$.
Bestimmen Sie eine Basis von U, dim(U) =?

Aufgabe 7 *alt*

a) Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^{3\times 3}$ der $3 \times 3-$ Matrizen.
Sei $U = \left\{A \in V \middle|\, A^T = -A\right\}$. Bildet die Teilmenge U einen Unterraum in V?
Falls ja, wie gross ist die Dimension von U?

b) Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Die Spalten $a^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$, von A bilden eine Basis in $\mathbb{R}^3$.

Bestimmen Sie ausgehend von den $a^{(k)}$ mit dem Verfahren von Gram – Schmidt eine ortho – normierte Basis von $\mathbb{R}^3$.

Lösung 4

f ist monoton fallend, d.h. für die Obersumme muss am linken Rand der Teilintervalle ausgewertet werden.

a) $\Delta x = \frac{2}{n}$ und $x_k = -1 + k \cdot \Delta x$ für $k = 1, 2, \ldots$, also

$$\begin{aligned} O_n &= \Delta x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \\ &= \Delta x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^{-x_k} = \Delta x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^{1-k\cdot\frac{2}{n}} \\ &= \frac{2}{n} \cdot e \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^{-k\cdot\frac{2}{n}} = \frac{2}{n} \cdot e \cdot \left(\frac{1-e^{-2}}{1-e^{-\frac{2}{n}}}\right) \end{aligned}$$

geometrische Teilsumme mit $q := e^{-\frac{2}{n}}$

b) $n > \frac{b-a}{\varepsilon} \cdot |f(b) - f(a)| = \frac{2}{5} \cdot 10^4 \left(\frac{e^2-1}{e}\right)$

Lösung 5

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \end{pmatrix}$, Rang$(A) = 1$

b) Schema nach einem Schritt:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1
1	2	3	4	5	0

4 freie Parameter: $x_{k+1} = \mu_k$, $k = 1, \ldots, 4$, also span$(U) = \{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$

und damit dim$(U) = 4$.

Lösung 6

a) $\sin(2x) \cdot \cos(3x) = \frac{1}{2}\,\{\sin(-x) + \sin(5x)\} = \frac{1}{2}\,\{-\sin(x) + \sin(5x)\}$ und damit:

$$(f_2(x), g_3(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} \ldots\, dx = \frac{1}{2} \cdot \left\{\cos(x) - \frac{1}{5}\cos(5x)\right\}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

d.h. f_2 und g_3 sind orthogonal.

b) Endschema:

α_1	α_2	α_3	α_4	1
1	0	1	0	0
.	1	-1	0	0
.	.	1	-1	0
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

Eine Basis ist z.B. $p_1(x) = 1 + x + x^5$, $p_2(x) = x^2 + x^4$ und $p_3(x) = 1 - x^2 + x^3 - x^5$.

Lösung 7

a)
- Seien $A \in U$ und $B \in U$: $(A+B)^T = A^T + B^T = -A - B = -(A+B) \Rightarrow A + B \in U$
- sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $a \in U$: $(\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha(-A) = -\alpha A = -(\alpha A) \Rightarrow \alpha A \in U$

D.h. U ist ein UR in V, $\dim(U) = 3$, da $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \in U$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

b) $b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung 8

a)

b)

c)

Mit dem Gauss-Algorithmus: Endschema:

x	y	z	1
2	3	1	0
.	2	4	0
.	.	3	0

d.h. der Rang $r = 3$, d.h. die drei Vektoren sind linear unabhängig.

Lösung 9

Gauss-Algorithmus

Schema nach einem Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	$4 - \frac{a^2}{2}$	$-2a$	$1 - 2a$

Schema nach zwei Schritten:

x_1	x_2	x_3	1
2	a	6	4
.	-2	4	3
.	.	$8 - 2a - a^2$	$7 - 2a - \frac{3}{4}\,a^2$

a)

b)

c)

d)

Lösung 10

a) $F \in g$, d.h. $F(-3+\mu, -3+7\mu, 1+3\mu)$ und damit $\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 5-\mu \\ 6-7\mu \\ 4-3\mu \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a} \cdot \overrightarrow{FA} = 0 \Longrightarrow \mu = 1$

und damit $F(-2, 4, 4)$. Also $g' :\ \vec{r} = \overrightarrow{0A} + \mu\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{0A'} = \overrightarrow{0A} + 2\overrightarrow{AF} \Longrightarrow A'(-6, 5, 3)$

Lösung 11

Gauss-Algorithmus, Endschema:

0	0	1	-1	-2	1
1	0	0	-1	-5	6
0	1	0	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{27}{5}$

Endschema:

x_1	x_2	x_3	x_4	1
1	0	1	-2	2
.	1	-2	3	-1
.	.	7	-6	5
.	.	.	.	2